UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 16. November 2010, vor den Übungen

1. Für die folgenden Funktionen f ist $l := \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ mit der Regel von de L'Hopital zu bestimmen. Die Funktion g sei durch
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ l & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$
definiert.
Bestimme die Taylorreihe von g mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und deren Konvergenzradius:
   (a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
   (b) $f(x) = \dfrac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$
   (c) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
   (e) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$
   (f) $f(x) = \dfrac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4}$ (9 Punkte)

2. Es sei
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$
Bestimme die Taylorreihe $Tf(0,x)$ mit Entwicklungspunkt 0. (3 Punkte)

3. Beweise:
$$\sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu z) = \frac{\sin\frac{nz}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{n} \cos(\nu z) = \frac{\cos\frac{nz}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin\frac{z}{2} \neq 0$. (2 Punkte)

4. Zeige den in der Vorlesung nicht bewiesenen Teil von Satz 5.4.10:

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

für $x, y, x+y \neq k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. (2 Punkte)

5. Es sei i die imaginäre Einheit, d.h. $i^2 = -1$. Beweise rein rechnerisch, ohne Konvergenzbetrachtungen, die folgende Beziehung von Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

(2 Punkte)

6. Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktion, die folgenden Bedingungen genügt:

$$f'' + f = 0, \quad f(0) = a \quad \text{und} \quad f'(0) = b.$$

Zeige:

(a) Der Ausdruck $f^2 + (f')^2$ ist konstant.

(b) Die Funktion $g(x) := f(x) - a\cos x - b\sin x$ erfüllt $g + g'' = 0$.

(c) Es gilt $f(x) = a\cos x + b\sin x$. (4 Punkte)

7. Mit Hilfe der Expontialfunktion und des Logarithmus lassen sich auch exotische Ausdrücke, wie

$$e^{\pi} := \exp(\pi) \quad \text{bzw.} \quad \pi^e := \exp(e \log \pi)$$

definieren.
Eine grobe Abschätzung liefert $21 < e^{\pi}$ und $\pi^e < 24$, aber welche dieser transzendenten Zahlen ist die größere von beiden? Beantworte diese Frage mit Hilfe analytischer Argumente. (2 Punkte)