UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Integration von Aufgabe 1 d) auf Übungsblatt 7

Zu bestimmen war

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x},$$

und bei dessen Bestimmung sind wir auf das Integral

$$\int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{2}{1-u^2}\, du$$

gestoßen, welches wir mit Partialbruchzerlegung berechnen konnten. Im folgenden wird gezeigt, daß es aber auch ohne diese Methode geht:

Aus Übungsblatt 5 kennen wir die Stammfunktion von $\frac{1}{1-u^2}$. Allerdings ist diese von der Größenordnung von u abhängig:

$$\text{Für } |u| < 1 \quad \text{gilt} \quad \int \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{Artanh} u, \quad \text{und für } |u| > 1 \quad \text{ist es} \quad \int \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{Arcoth} u.$$

Wo läuft nun die Variable u entlang? Sie beginnt bei 0, aber wo endet sie? Da der Tangens unbeschränkt ist, müssen wir den Wert $\tan \frac{\pi}{8}$ genauer untersuchen. Es ist wegen der strengen Monotonie

$$\tan \frac{\pi}{8} < \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1,$$

und damit verläuft der komplette Weg unterhalb von 1. Daher ist der Areatangens hyperbolicus maßgeblich, und es ist

$$\int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{2}{1-u^2}\, du = \left[2 \operatorname{Artanh} u\right] \Big|_0^{\tan \frac{\pi}{8}}.$$

Wie berechnet man nun aber $\operatorname{Artanh}(\tan \frac{\pi}{8})$? Wir kennen für den $\operatorname{Arcoth} u$ die Darstellung

$$\operatorname{Arcoth} u = \frac{1}{2} \log \left(\frac{u+1}{u-1} \right).$$

Analog findet man mittels

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^u + e^{-u} - 2e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = 1 - 2\frac{e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = 1 - \frac{2}{e^{2u} + 1}$$

und daher für $y = \operatorname{Artanh} u$

$$\begin{aligned} u = 1 - \frac{2}{e^{2y}+1} \quad &\Leftrightarrow \quad u - 1 = -\frac{2}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{2}{1-u} - 1 \Leftrightarrow 2y = \log\left(\frac{2-1+u}{1-u}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right), \end{aligned}$$

insgesamt also

$$\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2}{1-u^2}\,du = \left[\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]\Bigg|_0^{\tan\frac{\pi}{8}},$$

und damit dasselbe Ergebnis wie mittels Partialbruchzerlegung.