UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 7

Abgabe: Dienstag, 7. Dezember 2010, vor den Übungen

1. Bestimme folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} \, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$ (9 Punkte)

2. Beweise:

   (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
   $$\int_0^1 (x^2 - 1)^n \, dx = (-1)^n (n!)^2 \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}$$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \log x}.$ (4 Punkte)

3. Es sei $c_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
   Zeige:

   (a) $c_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 1}{2n \cdot (2n-2) \cdots 2}$

   (b) $c_{2n+1} = \dfrac{2n \cdot (2n-2) \cdots 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 3} = 2^{2n} \cdot \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

   (c) $\dfrac{c_{2n}}{c_{2n+1}} \to 1$ für $n \to \infty$

   (d) $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1}\right)$ (6 Punkte)

4. Es sei f auf $[0,1]$ differenzierbar, und es gilt $|f'(x)| \leq M$. Weiter sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ mit Feinheit η.
   Zeige: $\overline{S}(f,\mathcal{Z}) - \underline{S}(f,\mathcal{Z}) \leq M\eta$. (2 Punkte)

5. Es sei $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
   Zeige:

   (a) Die Funktion f ist auf $[a,b]$ von beschränkter Variation.

   (b) Es ist
   $$V(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

(3 Punkte)