UNIVERSITÄT ULM

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 8

Abgabe: Dienstag, 14. Dezember 2010, vor den Übungen

1. Bestimme folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^a \frac{2x^2+5x-5}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ (5 Punkte)

2. (a) Untersuche, für welche reellen α das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konvergiert bzw. absolut konvergiert.

   (b) Untersuche das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx$ für $\alpha, \beta > 0$ auf Konvergenz und versuche gegebenenfalls dessen Wert zu bestimmen. (5 Punkte)

   Hinweis:

   Absolute Konvergenz ist bei Integralen analog zur absoluten Konvergenz bei Summen definiert: so konvergiert ein Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ genau dann absolut, wenn $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergiert.

3. Zeige: Es konvergiert

$$\int_{1/n}^{n} \log t \cdot t^{x-1}e^{-t}\,dt \longrightarrow \int_0^\infty \log t \cdot t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

   für $n \to \infty$ gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \to \infty$. (2 Punkte)

4. Beweise oder widerlege:

   (a) Wenn die Funktion $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist und das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   (b) Wenn die bei a uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konvergieren, dann konvergiert auch $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$.

   (2 Punkte)

5. Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ stetig differenzierbar.

   (a) Zeige:
   $$(b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b T^{(1)} f\left(\frac{a+b}{2}, x\right) \, dx.$$

   Es werde nun f als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

   (b) Es sei $Q_T(f) := (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Zeige:
   $$\left| \int_a^b f(x)\, dx - Q_T(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|.$$

   (c) Es sei $\mathcal{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit Feinheit η. Es sei weiter
   $$J_T(f, \mathcal{Z}) := \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \cdot (x_{j+1} - x_j).$$

   Zeige:
   $$\left| \int_a^b f(x)\, dx - J_T(f, \mathcal{Z}) \right| \leq n \cdot \frac{\eta^3}{24} \cdot \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|.$$

   (d) Ist $J_T(f, \mathcal{Z})$ eine Riemannsche Summe? (4 Punkte)

6. Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ stetig differenzierbar.
   Die Sehnenfunktion $S(x, f)$ sei durch
   $$S(x, f) = f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot (f(b) - f(a))$$
   für alle $x \in [a,b]$ definiert.

   (a) Zeige:
   $$|S(x,f) - f(x)| \leq \int_a^x \left| f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right| dt.$$

   Es werde f nun wieder als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

   (b) Zeige unter Verwendung des Mittelwertsatzes
   $$\left| f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right| \leq (b-a) \cdot \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$
   für alle $t \in [a,b]$.

   (c) Es sei $Q_S(f) := \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b))$. Zeige:
   $$\left| \int_a^b f(x)\, dx - Q_S(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{2} \cdot \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

   (d) Es sei nun $\mathcal{Z}_n$ die Zerlegung von $[a,b]$ in n gleichlange Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$ der Länge $x_{j+1} - x_j = \dfrac{b-a}{n}$. Weiter sei
   $$J_S(f, \mathcal{Z}) := \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-2} f(x_j) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

   Zeige:
   $$\left| \int_a^b f(x)\, dx - J_S(f, \mathcal{Z}) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{2n^3} \cdot \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|.$$

   (e) Ist $J_S(f, \mathcal{Z})$ eine Riemannsche Summe? (6 Punkte)