Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 17. Januar 2012, vor den Übungen

1. Es sei C der Ring aller stetiger Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

   (a) Es sei I ein Ideal von C.
   Zeige: Gibt es zu jedem $x \in [0,1]$ ein $f \in I$ mit $f(x) \neq 0$, so ist $I = C$.

   Hinweis:
   Benutze den Satz von Heine- Borel:
   Jede offene Überdeckung eines kompakten Intervalls besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

   (b) Bestimme die maximalen Ideale von C. (10 Punkte)

2. Es sei
$$R = \left\{ \frac{a}{b} \colon a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ b \not\equiv 0 \bmod 2 \right\}.$$

   (a) Zeige: $(R, +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.

   (b) Bestimme sämtliche Ideale und maximalen Ideale von R.

   Hinweis:
   Betrachte für ein Ideal J von R die Zahl
$$m(J) = \max\left\{ m \in \mathbb{N}_0 \colon 2^m \big| a,\ \forall \frac{a}{b} \in J \right\}.$$

(14 Punkte)