

Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 31. Januar 2012, vor den Übungen

1. Es sei $\mathbb{Z}[i] := \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ mit $i^2 = -1$.
 - (a) Zeige: $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.
 - (b) Es sei $N(x + yi) = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige: Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt $N(w \cdot z) = N(w) \cdot N(z)$.
 - (c) Zeige: Es gilt genau dann $\epsilon \in \mathbb{Z}[i]^*$, wenn $N(\epsilon) = 1$ ist.
 - (d) Bestimme $\mathbb{Z}[i]^*$.
 - (e) Zeige, dass es zu jedem Paar $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ dann $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $N((\mu + \nu i) - (u + vi)) \leq \frac{1}{2}$ gibt.
 - (f) Zeige: $(\mathbb{Z}[i], N)$ ist ein Euklidischer Ring.

Hinweis:

Es seien $a, b \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ mit $ab^{-1} = \mu + \nu i$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

Bestimme dann $q = u + vi$ nach Teilaufgabe e) und setze $a = q \cdot b + r$.

- (g) Wir betrachten $M = 10001$, welche folgende Darstellungen als Summe von zwei Quadraten hat:

$$M = 100^2 + 1 \quad \text{und} \quad M = 76^2 + 65^2.$$

Ermittle die gewöhnlichen Primfaktoren von M mittels der Durchführung des Euklidischen Algorithmus für $a = 100 + i$ und $b = 76 + 65i$.

Gib eine Faktorisierung von M in Primelementen von $\mathbb{Z}[i]$ an.

(14 Punkte)

2. Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

Zeige:

- (a) $(R, +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.
- (b) Für $\gamma, \delta \in R$ ist $N(\gamma \cdot \delta) = N(\gamma) \cdot N(\delta)$.
- (c) Es gilt genau dann $\epsilon \in R^*$, wenn $N(\epsilon) \in \{-1, 1\}$ ist.
- (d) Es gilt $R^* = \{(-1)^m \cdot \eta^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ mit der "Grundeinheit" $\eta = 1 + \sqrt{2}$.

Hinweis:

Zeige in einem ersten Schritt, dass es für $\epsilon = u + v\sqrt{2} \in R^*$ mit $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $u \geq v > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon = \eta^n$ gibt. Führe den Widerspruchsbeweis mittels Betrachtung von $\epsilon \cdot \eta^{-1}$ für ein Gegenbeispiel mit minimalem u .

(10 Punkte)