Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 7. Februar 2012, vor den Übungen

1. Unter dem Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ zweier Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eines kommutativen Rings R versteht man

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\{a \cdot b \colon a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}) .$$

Zeige:

(a) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \colon a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

(b) Für $\alpha, \beta, \gamma \in R$ gilt $\alpha\beta = \gamma \Leftrightarrow (\alpha)(\beta) = (\gamma)$.

Im folgenden sei stets $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Weiter sei $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$, $\mathfrak{p}_1 = (\{3, 2 + \sqrt{-5}\})$ und $\mathfrak{p}_2 = (\{3, 2 - \sqrt{-5}\})$.
Zudem seien die Behauptungen

$$R/\mathfrak{p}_1 = \{a + \mathfrak{p}_1 \colon a \in \{0, 1, 2\}\} \quad [1]$$
$$R/\mathfrak{p}_2 = \{a + \mathfrak{p}_2 \colon a \in \{0, 1, 2\}\} \quad [2]$$

aufgestellt. Die Behauptung [2] darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.
Zeige:

(c) Für $\alpha, \beta \in R$ ist $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

(d) Es gilt $R^* = \{-1, 1\}$.

(e) Es gilt $\mathfrak{p}_1 \neq R$ und $\mathfrak{p}_2 \neq R$.

<u>*Hinweis:*</u>
Zeige zuerst $\mathfrak{p}_1 = R \Leftrightarrow \mathfrak{p}_2 = R$ und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset (3)$.

(f) Zeige die Behauptung [1].

(g) Die Ideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind Primideale.

(h) Das Ideal $\mathfrak{p}_1$ ist kein Hauptideal. (Dies gilt auch für $\mathfrak{p}_2$, was aber nicht gezeigt werden braucht.)

(i) Es gilt $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = (3)$, $\mathfrak{p}_1^2 = (2 + \sqrt{-5})$, $\mathfrak{p}_2^2 = (2 - \sqrt{-5})$ und $\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2^2 = (9)$. (24 Punkte)