ulm university universität ulm

Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Zusatzpunkte
Abgabe: Dienstag, 14. Februar 2012, vor den Übungen

1. (a) Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$ vom Grad 2 oder 3.
   Zeige: f ist in $K[X]$ genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle in $K[X]$ hat.

   (b) Es sei $\mathbb{F}_7 = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \cdot)$, und $f(X) = X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{3}X + \overline{3}$, wobei $\overline{a}$ hier a mod 7 bedeute.
   Zeige: f ist in $\mathbb{F}_7[X]$ irreduzibel.

   (c) Es sei α eine Nullstelle von f in einem Erweiterungskörper M von $\mathbb{F}_7$. Weiter sei $L = \mathbb{F}_7(\alpha)$.

   i. Wie viele Elemente hat L?

   ii. Es sei $\gamma = \overline{1} + \alpha$. Stelle γ^{-1} in der Form $\gamma^{-1} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\alpha + \overline{a_2}\alpha^2$ mit $\overline{a_i} \in \mathbb{F}_7$ dar.

   (14 Punkte)

2. Es sei $g(X) = X^2 + X + 1$ mit den Nullstellen

$$\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad \zeta^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

   sowie $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ und $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$.
   Es sei $\sqrt[3]{2}$ die positive reelle Nullstelle von $X^3 - 2$ und $\zeta \in \mathbb{C}$.
   Gib eine Basis des Vektorraums M über $\mathbb{Q}$ an sowie eine Faktorisierung von $f(X) = X^3 - 2$ in irreduziblen Faktoren von $L[X]$ und solchen von $M[X]$ an. (10 Punkte)