Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 8. November 2011, vor den Übungen

1. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$. Zeige:
   (a) Der Schnitt $H_1 \cap H_2$ ist wieder eine Untergruppe von G.
   (b) Ist H eine Untergruppe und $U \subseteq G$ zu H konjugiert, so ist auch U eine Untergruppe.

   Hinweis:
   Zwei Elemente $s, t \in G$ heißen konjugiert, falls es ein $g \in G$ gibt, so dass $t = gsg^{-1}$ gilt. Weiter heißen Teilmengen $S, T \subseteq G$ (in G) konjugiert, falls es ein $g \in G$ gibt, so dass $T = gSg^{-1}$ gilt.

   (c) Gib ein Beispiel für Gruppen G, H_1 und H_2 an, so dass die Vereinigung $H_1 \cup H_2$ keine Untergruppe von G ist. (6 Punkte)

2. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Wir teilen die ganzen Zahlen folgendermaßen in m disjunkte Teilmengen auf:
   Zu jedem $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ betrachten wir die Menge
   $$\overline{r} = r + m\mathbb{Z} := \{r + m \cdot k \colon k \in \mathbb{Z}\},$$
   welche man als Restklassen modulo m bezeichnet.
   Die Addition von Restklassen ist durch $\overline{r} + \overline{s} = \overline{r+s}$ definiert.
   (a) Zeige: die Addition ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Auswahl der Repräsentanten ab.
   (b) Die Menge der Restklassen modulo m wird mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bezeichnet.
   Zeige: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bildet mit der oben erklärten Addition eine abelsche Gruppe.
   (c) Wenn wir auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in analoger Weise über $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r \cdot s}$ eine Multiplikation definieren, unter welchen Vorausetzungen liegt dann eine Gruppe vor? Ist diese im Falle der Existenz abelsch? (10 Punkte)

3. In einem Ring wird zur additiven abelschen Gruppe die Assoziativität und ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation gefordert. Es sei nun $R^{n \times n}$ der Ring der quadratischen Matrizen der Dimension n über einem kommutativen Ring R.
   Dieser enthält die allgemeine Lineare Gruppe $GL_n(R) = \{A \in R^{n \times n} \colon A \text{ invertierbar}\}$, die Gruppe $SL_n(R) = \{A \in GL_n(R) \colon \det A = 1_R\}$ und die Menge $H_R = \{\alpha \cdot I \colon \alpha \in R^*\}$ mit der Einheitsmatrix $I \in SL_n(R)$, wobei R^* die Menge aller multiplikativ invertierbaren Elemente darstellt. Zeige:
   (a) Es sind H_R und $SL_n(R)$ Untergruppen von $GL_n(R)$.
   (b) Die Untergruppe H_R ist abelsch, hingegen ist $GL_n(R)$ im allgemeinen nicht abelsch.
   (c) Es sei nun speziell $R = \mathbb{Z}$. Dann gibt es eine unendliche abelsche Untergruppe in $SL_2(\mathbb{Z})$.

   Hinweis:
   Betrachte hierbei die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 Punkte)