Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 29. November 2011, vor den Übungen

1. Zu welcher Gruppe ist die Automorphismengruppe des Kubus isomorph? (4 Punkte)

2. Sei $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Menge der Restklassen modulo 2. Das minimale nichtnegative Restsystem ist $\{0, 1\}$ mit den Restklassen $\overline{0} = 0 + 2\mathbb{Z}$ und $\overline{1} = 1 + 2\mathbb{Z}$. Mit den Rechenregeln

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|cc|} \hline \cdot & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \end{array}$$

schreibt man $\mathbb{F}_2$ statt $Z/2\mathbb{Z}$.

   (a) Zeige, dass die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$$
   in $SL_3(\mathbb{F}_2)$ liegt, und dass die Operation der Untergruppe $\langle A \rangle$ auf $SL_3(\mathbb{F}_2)$ durch Multiplikation von links eine Partition der $SL_3(\mathbb{F}_2)$ in Bahnen (Nebenklassen) zu je sieben Elementen ergibt.

   (b) Bestimme $\operatorname{ord} SL_3(\mathbb{F}_2)$. (8 Punkte)

3. Die Gruppe G wirke von links auf der Menge M.

   (a) Die Elemente $m_1, m_2 \in M$ mögen zur selben Bahn der Gruppenwirkung von G gehören. Zeige: Die Stabilisatoren $\operatorname{Stab}_G(m_1)$ und $\operatorname{Stab}_G(m_2)$ sind konjugiert.

   (b) Gib ein Beispiel, dass für m_1 und m_2 aus verschiedenen Bahnen die Stabilisatoren nicht konjugiert zu sein brauchen.

   (6 Punkte)

4. Es sei $\sigma = (1\ 2\ 3)$. Die Untergruppe $U \leq S_4$ sei durch $U = \{id, \sigma, \sigma^2\}$ definiert. Bestimme alle Links- und Rechtsnebenklassen von U in S_4. (6 Punkte)