Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 20. Dezember 2011, vor den Übungen

1. Es sei $G = \{g_1 = 1_G, g_2, \ldots, g_n\}$ eine Gruppe mit n Elementen. Für $g \in G$ sei $gg_j = g_{\gamma(j,g)}$.
   Zeige:

   (a) Die Abbildung $\gamma(g)\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, $j \to \gamma(j, g)$ ist ein Element von S_n.

   (b) Die Abbildung $\Phi\colon G \to S_n$, $g \to \gamma(g)$ ist ein Monomorphismus. (10 Punkte)

2. Es sei G eine Gruppe mit $|G| = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$.
   Zeige:

   (a) Es gibt $g \in G$ mit $|\langle g \rangle| = 2$..

   <u>*Hinweis:*</u>
   Betrachte die Menge sämtlicher Paare (g, g^{-1}) mit $g \in G$.

   (b) Es sei $\gamma(g)$ wie in Aufgabe 1 definiert und m ungerade.
   Dann ist $\psi\colon G \to (\{-1, 1\}, \cdot)$, $g \to \mathrm{sgn}(\gamma(g))$ ein Epimorphismus.

   (c) Jede Gruppe G mit $|G| = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ hat einen Normalteiler vom Index 2.

(14 Punkte)