Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 10. Januar 2012, vor den Übungen

1. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und K ein Körper. Ein Ring $(K[G], +, \cdot)$ heißt Gruppenring von K, falls folgendes gilt:

   - Es ist $(K[G], +)$ ein Vektorraum über K.
   - Es gibt eine injektive Abbildung $\Phi \colon G \to K[G]$, $g \to \vec{v}_g$, so dass sich jedes $\vec{w} \in K[G]$ auf genau eine Weise als Linearkombination endlich vieler $\vec{v}_g$ darstellen lässt:
     $$\vec{w} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \vec{v}_{g_j}$$
     mit $n \in \mathbb{N}_0$, $\gamma_j \in K$ und $g_j \in G$, d.h. $\{\vec{v}_g \colon g \in G\}$ bildet eine Basis von $K[G]$ über K.
   - Die Multiplikation auf $K[G]$ erfüllt
     $$(\gamma \vec{v}_g) \cdot (\delta \vec{v}_h) = (\gamma\delta)\vec{v}_{g \circ h}$$
     für alle $\gamma, \delta \in K$ und $g, h \in (G, \circ)$.

   Zeige:

   (a) Ist G endlich mit $|G| > 1$, so ist $K[G]$ nicht nullteilerfrei.

   Hinweis:
   Es sei $g \in G$ mit $|\langle g \rangle| = m > 1$. Betrachte dann $\vec{w} = \vec{v}_{g^m} - \vec{v}_{1_G}$.

   (b) Für $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$ ist $K[G]$ ein Integritätsring. (10 Punkte)

2. Es sei K ein endlicher Körper mit $|K| = q$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ sowie $GL(n, K)$ die Gruppe aller nichtsingulären Matrizen vom Typ (n, n) und $SL(n, K)$ die Gruppe aller Matrizen aus $GL(n, K)$ mit Determinante 1.

   (a) Zeige: $SL(n, K) \trianglelefteq GL(n, K)$.

   (b) Zeige: $GL(n, K)/SL(n, K) \cong K^*$.

   (c) Bestimme $|GL(n, K)|$ und $|SL(n, K)|$.

   Hinweis:
   Es sei $A \in GL(n, K)$. Für die erste Zeile von A gibt es $q^n - 1$ Möglichkeiten. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die $(k + 1)$- te Zeile von A, wenn die k ersten Zeilen schon gewählt sind? (14 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2012!