UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 12

Abgabe: Mittwoch, 6. Juli 2011, vor den Übungen

1. In dieser Aufgabe wollen wir nun zeigen: *Für jedes* $n \geq 1$ *gibt es eine Primzahl* p *mit* $n < p \leq 2n$.

   (a) Zeige diese Aussage zunächst für $n < 4000$.

   (b) Zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$ gilt
   $$\prod_{p \leq x} p < 4^{x-1}.$$
   Hinweis:
   Zeige zuerst, daß es genügt, wenn dies für den Fall, daß x prim ist, gezeigt wird.

   (c) Zeige: Die Zahl $n!$ enthält den Primfaktor p genau $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$ mal.

   (d) Beweise: Die höchste Potenz von p, die $\binom{2n}{n}$ teilt, ist nicht größer als $2n$.

   (e) Folgere nun daraus: Für $n \geq 3$ gilt
   $$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n} p.$$

   (f) Zeige: Für $\frac{2}{3}n < p \leq n$ ist $p \nmid \binom{2n}{n}$.

   (g) Zeige: Für $n \geq 1$ gilt
   $$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}.$$

   (h) Folgere dann für $n \geq 3$
   $$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n \leq p \leq 2n} p.$$

   Nun wollen wir annehmen, daß es keine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ gibt.

   (i) Zeige: Mit Teilaufgabe b) gilt dann $4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}$.

   (j) Zeige, daß die Aussage in Teilaufgabe i) für $n \geq 4000$ falsch ist.

   (k) Folgere daraus die Behauptung. (24 Punkte)