UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 36 Punkte, alles Zusatzpunkte

Übungsblatt 13

Abgabe: Mittwoch, 13. Juli 2011, vor den Übungen

1. Es ist $10001 = 73 \cdot 137$. Außerdem sind 73 und 137 Primzahlen.
   Finde sämtliche Lösungen der Kongruenz
   $$x^2 \equiv 1 \mod 10001$$
   ohne Verwendung eines Rechners. (9 Punkte)

2. Es sei $F_k = 2^{2^k} + 1$ die k- te Fermatzahl mit $k \geq 2$.
   (a) Dann erfüllt jeder Primfaktor p von F_k die Bedingung
   $$p = 2^{k+2} \cdot a + 1$$
   mit einem $a \in \mathbb{N}$.
   (b) Folgere daraus $641 | F_5$. (8 Punkte)

3. (a) Stelle fest, ob 91 ein quadratischer Rest modulo der Primzahl 181 ist.
   (b) Für welche Primzahlen p ist 5 ein quadratischer Rest modulo p? (6 Punkte)

4. Es sei $p \in \mathbb{P}$, $x \in \mathbb{Z}$ und $p | (20x^2 - 1)$. Zeige:
   (a) $p \equiv 1 \mod 5$ oder $p \equiv 4 \mod 5$.
   (b) Es gibt unendlich viele Primzahlen mit letzter Dezimalstelle 9. (7 Punkte)

5. Es sei $n = 2^{1001} \cdot 3^{1600} + 1$, eine Zahl mit 1165 Dezimalstellen.
   Man kann rechnerisch folgende Tatsachen beweisen:
   $$5^{n-1} \equiv 1 \mod n \quad (1)$$
   $$5^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv 1 \mod n \quad (2)$$
   $$5^{\frac{n-1}{3}} \not\equiv 1 \mod n. \quad (3)$$
   Folgere aus (1), (2) und (3), daß n eine Primzahl ist.

   Hinweis:
   Betrachte $\operatorname{ord}_n 5$. (6 Punkte)