UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch, 8. Juni 2011, vor den Übungen

1. Besitzt $39^{(39^{39})}$ dieselbe Einerziffer wie $\left(39^{39}\right)^{39}$? (4 Punkte)

2. Es ist $341 = 11 \cdot 31$.

   (a) Zeige:
   $$2^{340} \equiv 1 \bmod 11 \quad \text{und} \quad 2^{340} \equiv 1 \bmod 31.$$

   (b) Es sei $b, n \in \mathbb{N}$. Ist n zusammengesetzt und gilt $ggT(b, n) = 1$ sowie $b^{n-1} \equiv 1 \bmod n$, heißt n eine Pseudoprimzahl zur Basis b. Zeige: $n = 341$ ist eine Pseudoprimzahl zur Basis 2.

   (c) Zeige: Ist n eine ungerade Pseudoprimzahl zur Basis 2, so ist auch $m = 2^n - 1$ eine Pseudoprimzahl zur Basis 2.

   Hinweis:
   Benutze eine Identität der Mersenneschen Primzahlen von Übungsblatt 2.

   (d) Die Folge (n_k) sei durch $n_0 = 341$ und $n_{k+1} = 2^{n_k} - 1$ definiert.
   Zeige: (n_k) ist eine unendliche Folge von Pseudoprimzahlen zur Basis 2.

   (e) Zeige: Alle Fermat- und Mersennezahlen sind prim oder pseudoprim. (10 Punkte)

3. Eine zusammengesetzte Zahl n, für die $b^{n-1} \equiv 1 \bmod n$ für alle $b \in \mathbb{N}$ mit $ggT(b, n) = 1$ gilt, heißt Carmichaelzahl.

   (a) Zeige: Ist $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$ mit $r \geq 3$ verschiedenen ungeraden Primfaktoren und gilt zudem $(p_i - 1) | (n - 1)$ für alle $i = 1, \ldots, r$, so ist n eine Carmichaelzahl.

   (b) Es sei p eine Primzahl mit $p - 1 = 2^s \cdot t$ mit einer ungeraden Zahl t und $p \nmid b$.
   Zeige: Dann ist entweder $b^t \equiv 1 \bmod p$ oder es gibt ein j mit $0 \leq j \leq s - 1$, so daß
   $$b^{2^j t} \equiv -1 \bmod p \quad \text{gilt.}$$

   (c) Zeige: $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ ist eine Carmichaelzahl.

   (d) Beweise: $5^{280} \not\equiv \pm 1 \bmod 561$.

   (e) Folgere aus Teilaufgabe d), daß 561 zusammengesetzt ist. (10 Punkte)