UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 15. Juni 2011, vor den Übungen

1. Es sei $\varphi(n)$ die Eulersche φ- Funktion.
   (a) Bestimme für $m = 1, 2, 4$ alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) = m$.
   (b) Zeige, daß $\varphi(n)$ für $n \geq 3$ stets gerade ist. (6 Punkte)

2. Zeige:
   (a) Ist $n \equiv 3 \bmod 4$, so gibt es eine Primzahl $p \equiv 3 \bmod 4$ mit $p|n$.
   (b) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \equiv 3 \bmod 4$. (6 Punkte)

3. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Zeige: es gibt $N \in \mathbb{N}$, so daß die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod N$ mehr als n_0 Lösungen modulo N hat. (4 Punkte)

4. (a) Zeige mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus folgende Darstellung mit $a, b \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}}$$

   mit $q_1 \in \mathbb{N}_0$ und $q_i \in \mathbb{N}$ mit $1 < i \leq n+1$.
   Dies nennt man eine Kettenbruchdarstellung von $\frac{a}{b}$, welche man auch folgendermaßen schreibt:

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}].$$

   (b) Zeige: $[q_1, q_2, \ldots, q_{n+1} + 1] = [q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}, 1]$, d.h. die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl ist nicht eindeutig, wenn man als letzte Zahl die 1 zuläßt.
   (c) Gilt $[p_1, p_2, \ldots, p_k] = [q_1, q_2, \ldots, q_l]$ mit $p_k, q_l \neq 1$, so ist $k = l$ und $p_i = q_i$ für $1 \leq i \leq k$.
   (d) Der Alb- Donau- Kreis mit Sitz in Ulm ist zu $20,989\%$ Anteilseigner an der OEW, den Oberschwäbischen Elektrizitätswerken, welche wiederum zu $45,01\%$ an der EnBW beteiligt sind. Bestimme von diesen beiden Anteilen und dem eigentlichen Anteil des Alb- Donau- Kreises an der EnBW die Kettenbruchentwicklung.

   (8 Punkte)