UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Probeklausur zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 130 Punkte, 100 Punkte= 100 %

keine Abgabe

1. Es seien p, q und r verschiedene Primzahlen.
   (a) Finde den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen p^5q^2 und p^3q^3r.
   (b) Gib jeweils den Wert der Eulerschen φ- Funktion an. (10 Punkte)

2. (a) Bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen 2323 und 943.
   (b) Entscheide über die Lösbarkeit der folgenden Diophantischen Gleichungen. Gib im positiven Falle eine Lösung an.
      i. $2323x + 943y = 92$.
      ii. $104x + 69y = 3$. (14 Punkte)

3. Bestimme das multiplikative Inverse von
   (a) 31 mod 163
   (b) 53 mod 349
   Benütze dazu die Information $53 \cdot 79 = 12 \cdot 349 + 1$. (10 Punkte)

4. (a) Wie lautet der kleinste Primfaktor von $2^{16} - 16$?
   (b) Zeige, daß die Summe 1000 aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen keine Primzahl sein kann. (12 Punkte)

5. (a) Zeige durch eine geeignete Reduktion auf eine Kongruenz, daß die Diophantische Gleichung
   $$x^3 + 5x + y^2 + 1 = 0$$
   keine Lösung besitzt.
   (b) Finde alle Lösungen der Kongruenz $x^3 - x + 3 \equiv 0 \bmod 7$. (10 Punkte)

6. (a) Gib eine Definition für die folgenden Begriffe an:
   i. gemeinsamer Teiler
   ii. kanonische Primfaktorzerlegung
   iii. Polynomkongruenz
   (b) Formuliere den Satz von Euler. (12 Punkte)

7. Es sei $d(n)$ die Anzahl der Teiler von $n \in \mathbb{N}$. Aus den Übungen wissen wir, daß die zahlentheoretische Funktion d multiplikativ ist. Ist sie auch vollständig multiplikativ? Beweise die Aussage oder verwende ein Gegenbeispiel. (6 Punkte)

8. (a) Bestimme $11^{93} \bmod 63$ mit $63 = 3^2 \cdot 7$.
   (b) Zeige, daß $3^{2011} + 5^{2011} + 11^{2011}$ durch 13 teilbar ist. (12 Punkte)

9. Bestimme die kleinste positive Zahl, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 6 \\ x &\equiv 5 \mod 17 \\ x &\equiv 7 \mod 19. \end{aligned}$$

   Es ist dabei $6 \cdot 17 \cdot 19 = 1938$. (14 Punkte)

10. Eine Primzahl M_n von der Form $M_n = 2^n - 1$ heißt Mersennsche Primzahl, und die k- te Fermatzahl F_k war definiert durch $F_k := 2^{2^k} + 1$.
    Zeige: Gilt $n = 2^m$, so ist M_n das Produkt der ersten $m - 1$ Fermatzahlen, es gilt also

$$M_n = \prod_{k=0}^{m-1} F_k.$$

    (10 Punkte)

11. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$ und p eine Primzahl. Zeige:
    (a) Für $2n < p \leq 3n$ ist $p | \binom{3n}{2n}$ und $p^2 \nmid \binom{3n}{2n}$.
    (b) Für $\frac{3}{2}n < p \leq 2n$ ist $p \nmid \binom{3n}{2n}$. (10 Punkte)

12. (a) Wie ist die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ definiert?
    (b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Leite aus der Schranke

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq 4^n$$

    eine Abschätzung der Form

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq c \cdot \frac{n}{\log n}$$

    mit kleinstmöglichem c her. (10 Punkte)

Viel Erfolg!