UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 20. Mai 2011, vor den Übungen

1. Es sei E die Euklidische Ebene und g eine Gerade von E. Eine Isometrie von g ist eine bijektive Abbildung $\Phi\colon g \to g$ mit $PQ \cong \Phi(P)\Phi(Q)$ für alle $P, Q \in g$.
   Zeige: Φ erhält die Zwischenrelation auf g:
   Ist $(P, Q, R) \in Z$ für $P, Q, R \in g$, so folgt auch $(\Phi(P), \Phi(Q), \Phi(R)) \in Z$. (12 Punkte)

2. Es sei $(A, \mathcal{G})$ eine Pappussche Ebene, und $g \in \mathcal{G}$ sei eine Gerade mit $\overline{0}, \overline{1} \in g$ und $\overline{0} \neq \overline{1}$. Weiter sei $g' \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $g' \neq g$, so daß $\overline{0} \in g'$. Es sei $E' \in g'$ und $E' \neq \overline{0}$. Weiter sei z die Parallele zu g durch E'.
   Dann kann g folgendermaßen zu einem Körper mit Nullelement $\overline{0}$ und Einselement $\overline{1}$ gemacht werden:

   - Addition:
     Für $a, b \in g$ sei $l(a)$ die Gerade durch a und E', $p(b)$ die Parallele zu g' durch b, c der Schnittpunkt von $p(b)$ und z und $q(a, b)$ die Parallele zu $l(a)$ durch c.
     Dann ist $a + b$ als Schnittpunkt von $q(a, b)$ mit g definiert.
   - Multiplikation:
     Es sei y die Gerade durch $\overline{1}$ und E', $r(b)$ die Parallele zu y durch b, b' der Schnittpunkt von $r(b)$ mit g' und $s(a, b)$ die Parallele zu $l(a)$ durch b'.
     Dann ist $a \cdot b$ als Schnittpunkt von $s(a, b)$ mit g definiert.

   Führe den Beweis für folgende Körperaxiome durch:

   (a) die Kommutativität von Addition und Multiplikation

   (b) die Existenz des Negativen, d.h. für alle $a \in g$ existiert ein $-a \in g$ mit $a + (-a) = \overline{0}$.

   (c) die Existenz des multiplikativen Inversen, d.h. für alle $a \in g \backslash \{\overline{0}\}$ existiert ein $a^{-1} \in g$ mit $a \cdot a^{-1} = \overline{1}$.

   (12 Punkte)