UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 5

Abgabe: Freitag, 1. Juli 2011, vor den Übungen

1. Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ nichtleer.
   Eine Bewegung
   $$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$
   mit
   $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
   und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Symmetrie von $\mathcal{M}$, falls $\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ gilt.
   Die Menge aller Symmetrien von $\mathcal{M}$ wird mit $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ bezeichnet.

   (a) Zeige: $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ bildet bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

   (b) Ist $\mathcal{M}$ konvex, E die Menge der Ecken von $\mathcal{M}$ und $\varphi \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})$, so ist $\varphi(E) = E$.

   (c) Ist $\mathcal{M}$ beschränkt, $\varphi \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})\backslash\{id\}$, so besitzt φ genau einen Fixpunkt x_F, d.h. $\varphi(x_F) = x_F$.

   (d) Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare Funktionale und $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.
   Weiter sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2\colon \varphi_i(x) \geq b_i,\ i \in \{1, 2, 3\}\}$ kompakt.
   Welche Möglichkeiten bestehen für die Symmetriegruppe? (24 Punkte)