Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 26. Oktober 2011, vor den Übungen

1. Gegeben seien die folgenden Geraden in der xy- Ebene, die wir mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren:

$$\begin{aligned} g_1\colon &\quad 9x = 14y - 29 \\ g_2\colon &\quad y + \frac{41}{42}x = \frac{53}{42} \\ g_3\colon &\quad x = 3 \end{aligned}$$

   (a) Stelle die Punkt- Richtungs- Gleichungen aller drei Geraden auf.

   (b) Bestimme alle Schnittpunkte dieser Geraden.

   (c) Skizziere die drei Geraden. (6 Punkte)

2. Die Ebene $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ gehe durch die drei Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Überprüfe, ob die beiden Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   auf E_1 liegen.

   (b) Bestimme die Parameterdarstellung von $E_2\colon x + 2y - z = 1$.

   (c) Stelle eine Punkt- Richtungs- Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2 auf. (6 Punkte)

3. Zeige, dass die Ebene, die die Koordinatenachsen in $x = a$, in $y = b$ und in $z = c$ mit $a, b, c \neq 0$ schneidet, durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

   beschrieben wird. (3 Punkte)

4. Es seien die drei Ebenen in Koordinatenform

$$\begin{aligned} E_1\colon &\quad a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ E_2\colon &\quad a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ E_3\colon &\quad a_3x + b_2y + c_3z = k_3 \end{aligned}$$

   gegeben.

   Welche Lösungen dieses Gleichungssystems sind möglich und welche Lage haben die Ebenen in diesen Fällen? (3 Punkte)

5. Entscheide, welche der folgenden Gleichungssysteme lösbar sind und gib gegebenenfalls die Lösungsmenge an:

(a) $$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y + 5z = 13 \\ 3x - 9y + 7z = 17 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y + 4z = 8 \\ x + 5y + 7z = 10 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} w + 2x + y - z = 3 \\ 2w + 4x + 3y - z = 7 \\ 3w + 6x + 4y + 2z = 14 \end{cases}$$

(6 Punkte)