Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 1. Februar 2012, vor den Übungen

1. Bestimme die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (2x-3y, x+y)^T$ bzgl.

   (a) der kanonischen Basis $\mathcal{B}_1$ des $\mathbb{R}^2$,

   (b) der Basis $\mathcal{B}_2 = \{(1,4)^T, (-2,1)^T\}$. (4 Punkte)

2. Es sei $V \subset L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\varphi\colon V \to V$, $p \to p(x) + p(-x)$ wie in Aufgabe 5 von Übungsblatt 10. Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$. (3 Punkte)

3. Es seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und V wie in Aufgabe 2 definiert.
   Weiter sei $\psi\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p(x) \to (p(x_0), \ldots, p(x_n))$.
   Es sei $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{n+1}$.

   (a) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.

   (b) Es sei $\mathcal{B}' = \{f_0, \ldots, f_n\}$, wobei die Polynome durch

   $$f_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

   definiert sind. Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{B}')$. (5 Punkte)

4. (a) Führe das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ mit Hilfe der Zerlegungen

   $$A = A_1 + iA_2, \quad \vec{x} = \vec{u} + i\vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2,$$

   wo $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\vec{u}, \vec{v}, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ reelle Vektoren sind, in ein reelles Gleichungssystem über.

   (b) Löse damit das LGS

   $$\begin{aligned} (3-2i)\cdot x_1 + (4+i)\cdot x_2 &= 2i \\ (1+i)\cdot x_1 - (2+3i)\cdot x_2 &= 5-i. \end{aligned}$$

   (5 Punkte)

5. Im $\mathbb{R}^3$ sind vier Ebenen durch $E_\nu\colon a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z = k_\nu$ mit $\nu \in \{1,2,3,4\}$ gegeben.

   (a) Unter welchen Bedingungen an den Rang ist der Schnitt der drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 eine Gerade?

   (b) Nun sei der Schnitt von E_1 und E_2 eine Gerade g_1 und der von E_3 und E_4 eine Gerade g_2. Charakterisiere die möglichen gegenseitigen Lagen von g_1 und g_2.

   (c) Wende das Konzept des Ranges auf Aufgabe 4 von Übungsblatt 1 an. Welche Bedingungen ergeben sich in den auftretenden Koeffizientenmatrizen? (7 Punkte)