ulm university universität uulm

Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 36 Zusatzpunkte

Abgabe: **Dienstag, 14. Februar 2012** um 16:00 Uhr c.t. im **H 15**

1. (a) Berechne im Falle der Existenz die Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   (b) Bestimme die Lösung von $D\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = (11, -11, 22)^T$. (10 Punkte)

2. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Bestimme M^{50} und M^{-7}. (4 Punkte)

3. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = (a_{ij})$ eine Matrix vom Typ (n, n) mit $a_{ij} \in K$, die durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j, \\ -1, & \text{falls} \quad i = j + 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   definiert sind. Bestimme A_n^{-1}. (6 Punkte)

4. Bestimme für die Permutationen $\sigma, \tau \in S_5$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) i. $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$
       ii. die Inversionen von σ und τ
       iii. $\operatorname{sgn}(\sigma)$, $\operatorname{sgn}(\tau)$, $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)$ und $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma)$.

   (b) Stelle σ und τ als Produkt von Transpositionen dar. (5 Punkte)

5. Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt k- Zyklus, falls paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, so dass

   - $\sigma(a_1) = a_2,\ \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \sigma(a_{k-1}) = a_k,\ \sigma(a_k) = a_1$,
   - $\sigma(b) = b$ für alle $b \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$

   erfüllt sind. Zeige:

   (a) Ist σ ein k- Zyklus, so gilt $\sigma^k = id_{\{1,\ldots,n\}}$ und $\sigma^l \neq id_{\{1,\ldots,n\}}$ für alle l mit $1 \leq l < k$.

   (b) Jeder k- Zyklus lässt sich als Produkt von $k-1$ Transpositionen auffassen. (5 Punkte)

6. Bestimme die Determinante von

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 26 & 1 & 57 \\ 7 & 17 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (6 Punkte)