Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 2. November 2011, vor den Übungen

1. In den folgenden Teilaufgaben sind jeweils Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben.
   Entscheide jeweils, ob $E = \{s\vec{u} + t\vec{v} \colon s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene ist. Im positiven Fall ist weiter zu überprüfen, ob $\vec{w} \in E$ erfüllt ist.

   (a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (5 Punkte)

2. (a) Im $\mathbb{R}^4$ sei die Hyperebene $H = \{\vec{x}_0 + s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2 + s_3\vec{u}_3 \colon s_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq 3\}$ mit

   $$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   und die Ebene $E = \{\vec{y}_0 + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 \colon t_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq 2\}$ mit

   $$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   gegeben.
   Zeige, dass sich H und E in einer Geraden schneiden und gib deren Gleichung an.

   (b) Im $\mathbb{R}^4$ seien die vier Punkte $P_1 = (1, 0, 1, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1, -1)$, $P_3 = (0, -1, 0, -1)$ sowie $P_4 = (1, -1, 0, 0)$ gegeben. Gib alle Hyperebenen an, die diese vier Punkte enthalten.
   (10 Punkte)

3. Es seien g und h Geraden im $\mathbb{R}^3$ mit den Parameterdarstellungen $g \colon \vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ und $h \colon \vec{x} = \vec{c} + r\vec{d}$.
   Beweise: Die Halbierungspunkte aller Strecken, welche Punkte von g und h mit jeweils gleichem Parameter verbinden, liegen auf einer Geraden. (6 Punkte)

4. Sind die beiden Ebenen $E_1 \colon 2y = 8x - 4z + 5$ und $E_2 \colon x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$ parallel? (3 Punkte)