Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 9. November 2011, vor den Übungen

1. Überprüfe, ob die folgenden Paare von Mengen und Verknüpfungen (abelsche) Gruppen bilden:

   (a) $(G, \circ)$ mit $G = \{f\colon X \to X\}$ auf einer Menge X und $\circ$ als der Komposition von Abbildungen

   (b) $(G, \star)$ mit $G = \mathbb{R}$ und
   $$\star\colon \begin{cases} G \times G \to G \\ (a,b) \to a \star b := \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

   (c) $(G, \cdot)$ mit $G = \{1\}$ und der gewöhnlichen Multiplikation (3 Punkte)

2. Wir definieren die Menge
   $$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \left\{ \frac{p + q\sqrt{2}}{r + s\sqrt{2}} \colon p, q, r, s \in \mathbb{Q},\ (r, s) \neq (0, 0) \right\}.$$

   (a) Zeige: jedes Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ lässt sich auch in der Form $u + v\sqrt{2}$ mit $u, v \in \mathbb{Q}$ darstellen.

   (b) Sind $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ und $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \cdot)$ Gruppen? (2+4 Punkte)

3. Es seien $\gamma, \sigma \in S_4$ mit
   $$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Berechne $\gamma \circ \sigma$, $\sigma \circ \gamma$ und σ^3. (3 Punkte)

4. Es sei $\mathbb{P} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Die Abbildung $r = r(a, b, c, d)$ sei durch
   $$r\colon \begin{cases} \mathbb{P} \to \mathbb{P} \\ x \to r(x) \end{cases} \quad \text{mit} \quad r(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d}, & \text{falls} \quad x \notin \left\{-\frac{d}{c}, \infty\right\} \\ \infty, & \text{falls} \quad x = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & \text{falls} \quad x = \infty,\ c \neq 0 \\ \infty, & \text{falls} \quad x = \infty,\ c = 0 \end{cases}$$
   definiert.

   (a) Zeige: r ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{P}$.

   (b) Es sei $G := \{r(a, b, c, d)\colon a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0\}$.
   Für $r_1, r_2 \in G$ sei $r_3 = r_1 \circ r_2$ die Abbildung
   $$r_3\colon \begin{cases} \mathbb{P} \to \mathbb{P} \\ x \to r_1(r_2(x)). \end{cases}$$
   Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe? Ist es eine kommutative Gruppe?
   Begründe die Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel. (3+3 Punkte)

5. (a) Es sei G eine Gruppe, in welcher $a + a = 0$ für alle $a \in G$ gelte, wobei 0 das neutrale Element dieser additiven Gruppe ist. Zeige: G ist abelsch.

   (b) Beweise: Verknüpft man sämtliche Elemente einer endlichen Gruppe G von links mit einem beliebigen Element der Gruppe, so erhält man wieder sämtliche Elemente der Gruppe.

(2+2 Punkte)

6. Entscheide, ob

$$M := \{x \in \mathbb{Q} \colon \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 2^n\}$$

zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist. (2 Punkte)