Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 16. November 2011, vor den Übungen

1. Überprüfe, ob die folgenden Mengen Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ sind:
   (a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 - x_2 = x_n\}$ mit $n \geq 2$
   (b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}$ mit $n \in \mathbb{N}$
   (c) Menge der Polynome vom Grad gleich $n \in \mathbb{N}$, d.h.
   $$\{P(x) : P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{R} \text{ für } j = 0, \ldots n \text{ und } a_n \neq 0\}$$
   (d) Menge der Paare, die die Gleichung $ax + by = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$ lösen.
   (e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$ (7 Punkte)

2. Es sei V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V.
   Zeige: Die Relation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in U$ hat für alle $x, y, z \in V$ folgende Eigenschaften:
   - $x \sim x$
   - $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
   - $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (3 Punkte)

3. Welchen Unterraum U des $\mathbb{R}^3$ stellen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ dar?

   Gib eine parameterfreie Darstellung von U an. (3 Punkte)

4. Begründe jeweils, ob U ein Untervektorraum des reellen Vektorraums V ist:
   (a) $V = \mathbb{R}[x]$ ist der Raum der reellen Polynome, $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x],\ \deg(p(x)) \leq n\}$
   (b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5\}$
   (c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$
   (d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 1,\ x_3 + x_4 = 2\}$. (4 Punkte)

5. Zeige, dass auf jeden Unterraum des Vektorraumes $V = \mathbb{R}^2$ eine der folgenden Aussagen zutrifft:
   - $U = \{\vec{0}\}$
   - Es gibt ein $\vec{v} \in V$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $U = \{\alpha\vec{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
   - $U = V$ (3 Punkte)

6. Es seien V_1 und V_2 reelle Vektorräume. Weiter seien $P := \{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) : \vec{v}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2 \in V_2\}$ und eine Addition über $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + (\vec{w}_1, \vec{w}_2) := (\vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{v}_2 + \vec{w}_2)$ für alle $(\vec{v}_1, \vec{v}_2), (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in P$ sowie eine skalare Multiplikation über $\alpha \cdot (\vec{v}_1, \vec{v}_2) := (\alpha\vec{v}_1, \alpha\vec{v}_2)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in P$ gegeben.
   Zeige: P ist ein reeller Vektorraum. (4 Punkte)