Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 30. November 2011, vor den Übungen

1. Es sei V ein reeller Vektorraum und U ein Unterraum von V mit $\vec{w} \in U$.
   Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear abhängig und $U = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$.
   Wir betrachten sämtliche Darstellungen $\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$.
   Welche der folgenden Fälle sind möglich? Gib ein Beispiel an oder beweise die Unmöglichkeit.

   (a) Der Skalar λ_1 hat immer denselben Wert.

   (b) Es ist stets $\lambda_3 = 2\lambda_2$.

   (c) Es kommen genau drei verschiedene Werte von λ_1 vor. (3 Punkte)

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Gegeben sei das LGS

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +\alpha_{1,3}x_3 & +\ldots & +\alpha_{1,n}x_n & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +\alpha_{2,3}x_3 & +\ldots & +\alpha_{2,n}x_n & = 0 \end{array}$$

   mit Lösungsmenge $\mathcal{L}$.

   (a) Zeige: $\mathcal{L}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

   (b) Gib eine Basis von $\mathcal{L}$ an. Die Basiseigenschaft ist nachzuweisen. (3 Punkte)

3. Es sei $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ der Körper mit zwei Elementen.
   Finde die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme:

   (a) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & & +x_4 & +x_5 & = 1 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & & = 1 \end{cases}$ (3 Punkte)

4. Ein Körper $\mathbb{F}_4$ mit vier Elementen ist durch $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, t, t+1\}$ mit $1+1=0$ und $t^2 = t+1$ gegeben.

   (a) Stelle die Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{F}_4$ auf.
   Die Körpereigenschaft braucht nicht bewiesen zu werden.

   (b) Finde die Lösungsmenge des folgenden LGS mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_4$:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +tx_3 & = t \\ tx_1 & +(t+1)x_2 & & = 1 \\ (t+1)x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0. \end{array}$$

   (5 Punkte)

5. Es sei $S_3 = \{\gamma_0 = id, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$.
Die Menge R sei durch die Menge aller Ausdrücke $\lambda_0\gamma_0 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 + \lambda_4\gamma_4 + \lambda_5\gamma_5$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ definiert.
Die Addition auf R wird komponentenweise definiert und die Multiplikation durch $\gamma_i \cdot \gamma_j = \gamma_i \circ \gamma_j$, wobei $\circ$ die Komposition auf S_3 ist und ansonsten $(\lambda_i\gamma_i) \cdot (\lambda_j\gamma_j) = (\lambda_i\lambda_j)(\gamma_i \cdot \gamma_j)$. Zudem sollen die Distributivgesetze gelten.

(a) Besitzt R ein Einselement?

(b) Ist R kommutativ?

(c) Gibt es $\alpha, \beta \in R\backslash\{0\}$ mit $\alpha \cdot \beta = 0$? (4 Punkte)

6. (a) Bestimme Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen mit $z = x + iy$:

$$(1+i)(8-2i), \quad \frac{3-2i}{1-i}, \quad z^2, \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}}, \quad i^{99},$$

wobei $\overline{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl ist.

Hinweis:
Die zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ ist durch $\overline{z} = x - iy$ definiert.

(b) Bestimme alle komplexen Zahlen, die gleich dem konjugiert Komplexen ihres Quadrates sind.

(c) Löse die Gleichung $|z| - z = 1 + 2i$ in $\mathbb{C}$.

(d) Zeige, dass für $n \geq 1$ die Menge E_n der n- ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, also die Menge der Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation, die für komplexe Zahlen definiert ist, eine abelsche Gruppe bildet. (6 Punkte)