Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 7. Dezember 2011, vor den Übungen

1. Es sei $\mathbb{F}_4$ der Körper mit vier Elementen, über dem ein Vektorraum V mittels $(V, \mathbb{F}_4, \circ)$ mit $V = \mathbb{F}_4^3$ definiert ist.

   (a) Zeige: Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ linear unabhängig, so gibt es 48 Vektoren $\vec{v}_3 \in V$, so dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

   (b) Zeige: Es gibt vier Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in V$, von denen je drei linear unabhängig sind.

   (c) Es sei $\mathcal{A}$ die Matrix vom Typ 3×4, deren Spalten gerade die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in V$ sind und $\mathcal{C}$ die Lösungsmenge des LGS $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{0}$.
   Zeige: $\mathcal{C}$ ist ein Code mit Alphabet $\mathbb{F}_4$ der Länge 4 und Minimalabstand ≥ 4. (3 Punkte)

2. Bestimme eine Basis des $(7,4)$- Hammingcodes. Die Basiseigenschaft ist nachzuweisen. (2 Punkte)

3. In den folgenden Beispielen ist jeweils V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge.
   Begründe jeweils, ob U auch ein Untervektorraum von V ist:

   (a) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $U = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$

   (b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) = \Im(z)\}$

   (c) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) = \Im(z)\}$ (2 Punkte)

4. Es sei der Vektorraum $V = \{f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\}$ und $U = \{f \in V \colon f(n+2) = f(n) + f(n+1),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ sowie $f_1, f_2 \in V$ mit

$$f_1(n) := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{und} \quad f_2(n) := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

   für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

   (a) Zeige: U ist ein Unterraum von V und $f_1, f_2 \in U$.

   (b) Zeige: f_1 und f_2 sind linear unabhängig.

   (c) Bestimme $f \in U$ mit $f(0) = f(1) = 1$.

   (d) Zeige: Für $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $f \in U$ mit $f(0) = \alpha_0$ und $f(1) = \alpha_1$, nämlich

$$f = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_1 - \alpha_0 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot f_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_0 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \alpha_1\right) \cdot f_2.$$

   (e) Zeige: f_1 und f_2 bilden eine Basis von U.

   (f) Wir betrachten wieder $f \in U$ mit $f(0) = f(1) = 1$.
   Zeige: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $f(m+n+2) = f(n) \cdot f(m) + f(n+1) \cdot f(m+1)$. (8 Punkte)

5. Es seien V ein Vektorraum über K mit $\mathbb{Q} \subset K$ und $T = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V.
   Wir definieren $a_{n+1} := -\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$.
   Zeige: Jeder Vektor $a \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form
$$a = \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu a_\nu$$
   mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in K$ und $\sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu = 0$. (4 Punkte)

6. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Wir teilen die ganzen Zahlen folgendermaßen in m disjunkte Teilmengen auf:
   Zu jedem $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ betrachten wir die Menge
$$\overline{r} = r + m\mathbb{Z} := \{r + m \cdot k \colon k \in \mathbb{Z}\},$$
   welche man als Restklassen modulo m bezeichnet.
   Die Addition von Restklassen ist durch $\overline{r} + \overline{s} = \overline{r+s}$ definiert.
   (a) Zeige: die Addition ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Auswahl der Repräsentanten ab.
   (b) Die Menge der Restklassen modulo m wird mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bezeichnet.
   Zeige: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bildet mit der oben erklärten Addition eine abelsche Gruppe.
   (c) Wenn wir auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in analoger Weise über $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r \cdot s}$ eine Multiplikation definieren, wobei wir die Restklasse $\overline{0}$ ausnehmen, unter welchen Vorausetzungen liegt dann eine Gruppe vor? Ist diese im Falle der Existenz abelsch?
   (d) Ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auch ein Ring bzw. ein Körper? (5 Punkte)