Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 14. Dezember 2011, vor den Übungen

1. Es seien U_1 und U_2 Unterräume des $\mathbb{R}^5$ mit $\dim U_1 = \dim U_2 = 3$.
   Welche der nachfolgenden Fälle sind möglich, welche unmöglich? Die Antwort ist zu begründen.
   (a) $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$
   (b) $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$
   (c) $\dim(U_1 + U_2) = 4$ (3 Punkte)

2. Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $\mathbb{F}_4$ derjenige mit vier Elementen.
   Jeder der folgenden Unterräume U von $\mathbb{F}_4^3$ kann als Vektorraum über $\mathbb{F}_4$ oder über $\mathbb{F}_2$ aufgefasst werden: $(U, \mathbb{F}_4, \circ)$ oder $(U, \mathbb{F}_2, \circ)$. Gib jeweils Basen für beide Vektorräume an.
   (a) $U = \{(xt, x + ty, (t + 1) \cdot y) \colon x, y \in \mathbb{F}_4\}$
   (b) $U = \{(x, y, z) \colon x + y + z = 0,\ x, y, z \in \mathbb{F}_4\}$ (6 Punkte)

3. (a) Gib sämtliche Basen folgender Vektorräume V an:
      i. $V = (\mathbb{F}_2^2, \mathbb{F}_2, \circ)$
      ii. $V = (\langle \vec{v} \rangle, \mathbb{F}_4, \circ)$ mit $\vec{v} = (t, 1, t + 1) \in \mathbb{F}_4^3$
   (b) Wieviele Basen gibt es für den Vektorraum $(\mathbb{F}_4^3, \mathbb{F}_4, \circ)$ (mit Begründung)? (5 Punkte)

4. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = 3$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig.
   Welche Eigenschaften müssen die Koeffizienten $s, t, u \in K$ erfüllen, damit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + u\vec{v}_3\}$ eine Basis von V bildet? (2 Punkte)

5. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\mathbb{R} \subset K$. Weiter sei $T \subset V$. Diese Menge T heißt konvex, wenn für alle $a, b \in T$ und für alle $\lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ die Eigenschaft $\lambda a + (1 - \lambda)b \in T$ gilt.
   Weiter sei $\mathcal{C}$ eine Menge von konvexen Teilmengen $C \subset V$.
   (a) Zeige: Die Menge $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ ist konvex.
   (b) Die kleinste konvexe Menge in V, die T enthält, wird über
   $$\mathrm{co}(T) := \bigcap_{C \in \mathcal{C}_T} C$$
   mit $\mathcal{C}_T = \{C \subset V \colon T \subset C \text{ und } C \text{ ist konvex}\}$ definiert.
   Zeige: Wenn $C \subset V$ konvex ist und $T \subset C$ gilt, dann ist $\mathrm{co}(T) \subset C$.
   (c) Zeige: Für $T \neq \emptyset$ gilt
   $$\mathrm{co}(T) = \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu \in V \colon n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in T,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1] \subset \mathbb{R},\ \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = 1 \right\}.$$
   (8 Punkte)