Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 21. Dezember 2011, vor den Übungen

1. Es sei $P = \mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen.
   (a) Zeige: Mit der Addition $p_1 \oplus p_2 = p_1 \cdot p_2$ für alle $p_1, p_2 \in P$ (gewöhnliche Multiplikation) und der skalaren Multiplikation $r \odot p = p^r$ für alle $p \in P$ und $r \in \mathbb{R}$ stellt P einen reellen Vektorraum dar.
   (b) Zeige: Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to P$, $f(x) = 2^x$ ist linear.
   (c) Gib die Menge $\mathcal{F}$ aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ in P an.
   (d) Wie sieht die Nullabbildung in $\mathcal{F}$ aus? (6 Punkte)

2. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$. Weiter seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $U_1 \oplus U_2 = V$ (direkte Summe).
   Zeige: es existiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\text{Bild}(\varphi) = U_2$ und $\text{Kern}(\varphi) = U_1$. (5 Punkte)

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$. Weiter sei $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige:
   (a) $\text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi^2)$
   (b) Es gilt genau dann $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) \neq \{\vec{0}\}$, wenn $\text{rg}(\varphi^2) < \text{rg}(\varphi)$ gilt. (4 Punkte)

4. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $U \subset G$ nichtleer. Weiter gelte $x \circ y \in U$ für alle $x, y \in U$. Zeige:
   (a) Im allgemeinen ist U keine Gruppe.
   (b) Ist U allerdings endlich, so ist U eine Gruppe. (6 Punkte)

5. Es sei $V = K$ und K ein Körper.
   Zeige, dass die Abbildung $f\colon V \to V$, $x \to x^2$ genau dann linear ist, wenn $|V| = 2$ gilt. (3 Punkte)