ulm university universität ulm

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 1. Februar 2013, vor den Übungen

1. Entscheide für jeden der folgenden Moduln m, ob $r = 3$ eine Primitivwurzel modulo m ist.

   (a) $m = 5$

   (b) $m = 11$ (4 Punkte)

2. Zeige:

   (a) Ist $k > 1$ und $F_k = 2^{2^k} + 1$ prim, so ist 2 keine Primitivwurzel modulo F_k.

   (b) Ist p ein ungerader Primfaktor von $a^{2^k} + 1$, so gilt $p \equiv 1 \bmod 2^{k+1}$. (4 Punkte)

3. Es ist $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

   (a) Bestimme $\operatorname{ord}_{89} 2$.

   (b) Ist 2 eine Primitivwurzel modulo 89?

   (c) Berechne $3^3 \bmod 23$. Bestimme mit dem Ergebnis der Teilaufgaben a) und b) nun $\operatorname{ord}_{23} 3$.

   (d) Zeige mit den Ergebnissen der drei Teilaufgaben a) bis c), dass 5 die kleinste Primitivwurzel modulo 23 ist. (8 Punkte)

4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine ungerade Primzahl. Zeige:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^n \equiv \begin{cases} 0 \bmod p & \text{für } (p-1) \nmid n \\ -1 \bmod p & \text{für } (p-1) \mid n. \end{cases}$$

(8 Punkte)