Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 36=24+12 Punkte

Abgabe: Freitag, 2. November 2012, vor den Übungen

1. (a) Ist p eine Primzahl $p > 5$, so gilt $240|(p^4 - 1)$.

   (b) Zeige mittels der beiden Beziehungen $827 = 67k + y$ und $559 = 67l + y$ mit $k, l, y \in \mathbb{N}$ die Aussage $67|\ (827^n - 559^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   (c) Zeige $360|\ n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (9 Punkte)

2. (a) Unter der Teilersumme σ einer natürlichen Zahl n versteht man die Summe all seiner Teiler.

      i. Was ist $\sigma(p)$ mit einer Primzahl p?

      ii. Zeige: $\sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$.

      iii. Zeige: $\sigma(p \cdot q) = \sigma(p) \cdot \sigma(q)$ mit Primzahlen p und q.

   (b) Eine Primzahl q von der Form $q = 2^m - 1$ heißt <u>Mersennesche Primzahl</u>.
   Zeige: Wenn $q = 2^m - 1$ ist eine Primzahl ist, ist bereits m eine Primzahl.

   (c) Eine natürliche Zahl m heißt <u>vollkommen</u>, wenn m die Summe seiner "echten" Teiler ist, also ohne die Zahl m selbst.
   Zeige: Ist m von der Form $m = 2^{p-1}(2^p - 1)$, wobei $q = 2^p - 1$ eine Mersennesche Primzahl ist, so ist m vollkommen.

   (d) i. Keine Primzahl ist vollkommen.

      ii. Ist p eine Primzahl, so kann p^α mit $\alpha \in \mathbb{N}$ keine vollkommene Zahl sein.

   (e) i. Wenn p und q verschiedene Primzahlen mit $p, q > 2$ sind, ist $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ nicht vollkommen.

      ii. Ist diese Aussage immer noch richtig, wenn man die Bedingung $p, q > 2$ wegläßt?

   (15 Punkte)