ulm university universität ulm

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 9. November 2012, vor den Übungen

1. Es seien $m = 215730$ und $n = 72072$ gegeben.
   (a) Bestimme die kanonische Primfaktorzerlegung von m und n.
   (b) Bestimme $ggT(m, n)$ und $kgV(m, n)$. (6 Punkte)

2. (a) In der Vorlesung wurde das Siebverfahren des Erathosthenes mit $N = 100$ durchgeführt. Führe ausgehend von diesem Schema dasselbe Verfahren "rückwärts" durch und lies daraus alle Darstellungen der Zahl 100 als Summe von zwei Primzahlen ab.
   (b) Stelle die geraden Zahlen k mit $6 \leq k \leq 30$ als Summe von zwei Primzahlen dar.
   Gib dabei alle Möglichkeiten an.
   (c) Modifiziere das Sieb des Erathosthenes derart, dass sich als Ergebnis alle Primzahlzwillinge ergeben, d.h. alle Primzahlen p, so dass $p + 2$ ebenfalls eine Primzahl ist. (8 Punkte)

3. (a) Zeige: Ist $2^m + 1$ für $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann ist m von der Form $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Wiederum sei $k \in \mathbb{N}_0$. Die k- te <u>Fermatzahl</u> F_k ist durch $F_k := 2^{2^k} + 1$ definiert.
   Zeige: $F_k = F_0 \cdots F_{k-1} + 2$
   (c) Zeige: Für $k \neq l$ gilt $ggT(F_k, F_l) = 1$.
   (d) Folgere aus dem Ergebnis von c), daß es unendlich viele Primzahlen gibt.
   (e) Auf Carl- Friedrich Gauß geht folgender Satz zurück:
   Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist ein regelmäßiges Polygon mit n- Ecken genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^\alpha \cdot \prod_k F_k$ mit paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen F_k mit $\alpha, k \in \mathbb{N}_0$ ist.
   Für welche $n \in \mathbb{N}$ mit $3 \leq n \leq 35$ ist das regelmäßige Polygon mit n- Ecken mit Zirkel und Lineal konstruierbar? (10 Punkte)