Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 23. Oktober 2012, vor den Übungen

1. Es sei $d \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl und $R = I(\sqrt{d}) := \{a_0 + a_1\sqrt{d}\colon\ a_0, a_1 \in \mathbb{Z}\}$. Es sei R^* die Gruppe der Einheiten von R. Für $\alpha = a_0 + a_1\sqrt{d}$ sei $\alpha' = a_0 - a_1\sqrt{d}$. Schließlich sei $N(\alpha) = \alpha\alpha'$. Zeige:
   (a) $(R, +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.
   (b) Für $\alpha, \beta \in R$ ist $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.
   (c) Es gilt genau dann $\alpha \in R^*$, wenn $N(\alpha) \in \{-1, 1\}$ ist.
   (d) Für $\alpha \in R^*$ und $\alpha > 1$ gilt $|\alpha'| < 1$.
   (e) Es sei $\alpha = a_0 + a_1\sqrt{d} \in R^*$ und $\alpha > 1$. Dann gilt $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$.

       Hinweis:
       Betrachte die Ausdrücke $\alpha + \alpha'$ und $\alpha - \alpha'$ und verwende Teilaufgabe d).
       Ferner beachte $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.
   (f) Falls $R^* \neq \{-1, 1\}$ ist, gibt es ein kleinstes $\alpha \in R^*$ mit $\alpha > 1$, nämlich die Grundeinheit $\alpha = \eta$. Zeige: es ist dann $R^* = \{(-1)^m \cdot \eta^k \colon m \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}$.

       Hinweis:
       Nimm an, diese Aussage ist falsch und betrachte das kleinste Gegenbeispiel α_0 mit $\alpha_0 > 1$. Bilde dann $\alpha_0\eta^{-1}$.
   (g) Finde sämtliche Lösungen der Diophantischen Gleichungen
       i. $x^2 - 3y^2 = -1$
       ii. $x^2 - 3y^2 = 1$
       iii. $x^2 - 13y^2 = -1$
       iv. $x^2 - 13y^2 = 1$

       bzw. zeige ihre Unlösbarkeit. (12 Punkte)

2. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $B(R)$ die Menge aller idempotenter Elemente in R. Unter einem Modul versteht man einen Vektorraum, der nicht über einem Körper K sondern über einem Ring R definiert ist.
   (a) Zeige: Für $b \in B(R)$ sind die R- Moduln R und $Rb \times R(1-b)$ zueinander isomorph.
   (b) Es seien $p \in \mathbb{P}$ und $r, s \in \mathbb{N}$. Warum ist die Gruppe $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ niemals zyklisch?
   (c) Folgere mittels Teilaufgabe b), dass $B(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \{0, 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   (d) Bestimme $|B(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|$ für $m \in \mathbb{N}$. Gib $B(\mathbb{Z}/360\mathbb{Z})$ explizit an.

       Hinweis:
       Betrachte die Primfaktorzerlegung von m und nutze den Chinesischen Restsatz. (10 Punkte)

3. Löse die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$. (2 Punkte)