Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 8. Januar 2013, vor den Übungen

1. Es sei $k \in \mathbb{N}$, Φ_k das k- te Kreisteilungspolynom, $m \in \mathbb{N}$, p eine Primzahl mit $p|\Phi_k(m)$ und $p \not| k$ sowei $k' = \operatorname{ord}_p m$. Zeige:
   (a) $k'|k$
   (b) Ist $k > k'$, so ist $\frac{m^k-1}{m^{k'}-1} \equiv 0 \bmod p$.
   (c) $\operatorname{ord}_p m = k$
   (d) $p \equiv 1 \bmod k$
   (e) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \equiv 1 \bmod k$. (10 Punkte)

2. Es sei $p > 2$ eine Primzahl, $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ mit Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$.
   (a) Zeige: Für $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ gilt genau dann $G(L/\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$, wenn $\sigma(\zeta_p) = \zeta_p^r$ für eine Primitivwurzel $r \bmod p$ erfüllt ist.
   (b) Es seien $G(L/\mathbb{Q}) = \langle\sigma_r\rangle$ mit $\sigma_r(\zeta_p) = \zeta_p^r$ und $\eta = \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} \zeta_p^{(r^{2j})}$.
   Zeige unter Verwendung des Hauptsatzes der Galoistheroie $L^{\langle\sigma_r^2\rangle} = \mathbb{Q}(\eta)$ und $[\mathbb{Q}(\eta) \colon \mathbb{Q}] = 2$.

   Zur genaueren Bestimmung von $\mathbb{Q}(\eta)$ führe nun noch die folgenden Überlegungen durch:

   (c) Es sei $G = \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) e^{\frac{2\pi i m}{p}}$ mit dem Legendresymbol $\left(\frac{m}{p}\right)$. Zeige:
   $$G^2 = \sum_{m_1=1}^{p-1}\sum_{m_2=1}^{p-1} \left(\frac{m_1 m_2}{p}\right) e^{\frac{2\pi i(m_1+m_2)}{p}} = \sum_{m_1=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) e^{\frac{2\pi i m_1(n+1)}{p}} = \begin{cases} p & \text{für } p \equiv 1 \bmod 4 \\ -p & \text{für } p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$
   (d) Zeige:
   $$L^{\langle\sigma_r^2\rangle} = \begin{cases} \mathbb{Q}(\sqrt{p}) & \text{für } p \equiv 1 \bmod 4 \\ \mathbb{Q}(\sqrt{-p}) & \text{für } p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$
   (10 Punkte)

3. Finde die Kommutatorgruppe $[G \colon G]$ sowie eine Kompositionsreihe von G für
   (a) $G = \gamma_4$, die symmetrische Gruppe
   (b) $G = D_4$, die Symmetriegruppe des Quadrats
   (c) $G = Q$, die Quaternionengruppe. (4 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2013!