ulm university universität ulm

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 22. Januar 2013, vor den Übungen

1. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $f(X) = X^{10} + aX^5 + b$ separabel. Zeige: $|G(f, \mathbb{Q})| \leq 200$. (5 Punkte)

2. Es sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe mit $p||G|$, aber $p^2 \not| |G|$. Es sei $\mathcal{S}_p$ die Menge aller p- elementigen Teilmengen von G. Für $g \in G$ und $\mathcal{M} = \{h_1, \ldots, h_p\} \in \mathcal{S}_p$ sei $g\mathcal{M} = \{gh_1, \ldots, gh_p\}$. Zeige:

   (a) Für $g \in G$ und $\mathcal{M} \in \mathcal{S}_p$ gilt $g\mathcal{M} \in \mathcal{S}_p$.

   (b) Die Abbildung $\Phi\colon G \times \mathcal{S}_p \to \mathcal{S}_p$, $(g, \mathcal{M}) \to g\mathcal{M}$ ist eine Wirkung der Gruppe G auf $\mathcal{S}_p$ von links.

   (c) Für den Stabilisator $\mathrm{Stab}(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M} \in \mathcal{S}_p$ bzgl. Φ gilt $|\mathrm{Stab}(\mathcal{M})| \leq p$.

   (d) Für die Bahn $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M}$ gilt genau dann $|\mathrm{Stab}(\mathcal{M})| = p$, wenn $p \not| |\mathcal{B}(\mathcal{M})|$ gilt.

   (e) Es gilt $p \not| |\mathcal{S}_p|$.

   (f) Es gibt eine Untergruppe $U_p \leq G$ mit $|U_p| = p$.

   (g) Ist $G \leq \gamma_p$ (die symmetrische Gruppe) mit $p||G|$, so enthält G einen Zyklus der Länge p.

   (h) Ist $G \leq \gamma_p$, $p||G|$ und enthält G eine Transposition, so ist $G = \gamma_p$. (14 Punkte)

3. Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl, $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel und $\deg(f) = p$. Weiter habe f genau $p - 2$ reelle Nullstellen und ein Paar nicht reeller, konjugiert komplexer Nullstellen.
   Zeige $G(f, \mathbb{Q}) \cong \gamma_p$ und f ist nicht auflösbar.

   Hinweis:
   Das Ergebnis von Aufgabe 2h) darf ohne Beweis benützt werden. Weiterhin darf benützt werden, dass für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe $\mathcal{A}_n$ einfach und nichtabelsch ist. (5 Punkte)