Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 29. Januar 2013, vor den Übungen

1. Es sei $\mathrm{char}(K) = 0$, $f \in K[X]$ irreduzibel und $\deg(f) = 4$.
In einem Zerfällungskörper L von f über K sei

$$f(X) = \prod_{j=1}^{4} (X - \alpha_j)$$

und $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Es sei $\beta_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$, $\beta_2 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4$ und $\beta_3 = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3$ sowie $\mathcal{M} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Weiter sei $g(X) = (X - \beta_1) \cdot (X - \beta_2) \cdot (X - \beta_3) \in L[X]$.
Die Permutationsgruppe $\gamma(\mathcal{N}) \cong \gamma_4$ wirke auf $\mathcal{M}$ folgendermaßen:
Es sei $\beta_j = \alpha_{1,1}\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}\alpha_{2,2}$ mit $\alpha_{i,k} \in \mathcal{N}$ und $1 \leq j \leq 3$.
Für $\sigma \in \gamma(\mathcal{N})$ sei dann $\Phi(\sigma)(\beta_j) = \sigma(\alpha_{1,1})\sigma(\alpha_{1,2}) + \sigma(\alpha_{2,1})\sigma(\alpha_{2,2})$, womit $\Phi(\sigma) \in \gamma(\mathcal{M})$ gilt.
Es sei $\mathrm{Stab}(\beta_j)$ der Stabilisator von β_j bzgl. dieser Gruppenwirkung, d.h.

$$\mathrm{Stab}(\beta_j) = \{\sigma \in \gamma(\mathcal{N})\colon \Phi(\sigma)(\beta_j) = \beta_j\}.$$

Es sei D die Diskriminante von f.
Zeige:

(a) Es gilt $g \in K[X]$ und g ist separabel.

(b) Die Wirkung von $\gamma(\mathcal{N})$ auf $\mathcal{M}$ besitzt nur eine Bahn. Für $1 \leq j \leq 3$ ist $\mathrm{Stab}(\beta_j) \cong D_4$, der Symmetriegruppe des Quadrats.

(c) Für $\sigma \in \gamma(\mathcal{N})$ sei $|\langle \Phi(\sigma) \rangle| = 3$. Dann ist σ ein Dreierzyklus.

(d) Ist g in $K[X]$ irreduzibel, so gilt

$$G(f, K) \cong \begin{cases} \gamma_4, & \text{falls } \sqrt{D} \notin K \\ A_4, & \text{falls } \sqrt{D} \in K. \end{cases}$$

(e) Ist g in $K[X]$ reduzibel, so gilt

$$G(f, K) \cong \begin{cases} D_4 \text{ oder } (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +), & \text{falls } \sqrt{D} \notin K \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, & \text{falls } \sqrt{D} \in K. \end{cases}$$

(24 Punkte)