ulm university universität ulm

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 30. Oktober 2012, vor den Übungen

1. Es sei $R = I(\sqrt[3]{2}) := \{a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2 \colon\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$ sowie $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ mit $i^2 = -1$. Für $\alpha = a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2 \in I(\sqrt[3]{2})$ seien

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} &:= \alpha, \\ \alpha^{(1)} &:= a_0 + a_1\sqrt[3]{2}\zeta + a_2\sqrt[3]{2}^2\zeta^2 \quad \text{sowie} \\ \alpha^{(2)} &:= a_0 + a_1\sqrt[3]{2}\zeta^2 + a_2\sqrt[3]{2}^2\zeta. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir $N(\alpha) := \prod_{k=0}^{2} \alpha^{(k)}$.

Zeige:

(a) $(R, +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.

(b) Für $\alpha \in R$ gilt $\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \in R$ und $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Hinweis:

Beachte $\zeta^2 = \overline{\zeta}$ und $\zeta^3 = 1$.

(c) Für $\alpha, \beta \in R$ ist $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

(d) Es gilt genau dann $\alpha \in R^*$, wenn $N(\alpha) \in \{-1, 1\}$ ist.

(e) Für $\alpha \in R^*$ und $\alpha > 1$ gilt $|\alpha^{(1)}| = |\alpha^{(2)}| < 1$.

(f) Es sei $\alpha = a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2 \in R^*$ und $\alpha > 1$. Dann gilt $a_i \geq 0$ für $i \in \{0, 1, 2\}$.

Hinweis:

Betrachte die Ausdrücke $\alpha^{(0)} + \zeta^k\alpha^{(1)} + \zeta^{2k}\alpha^{(2)}$ für $k \in \{0, 1, 2\}$.

(g) Es gilt $R^* = \{(-1)^m \cdot \eta^k \colon m \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}$ mit der Grundeinheit $\eta = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2$.

(h) Finde sämtliche Lösungen der Diophantischen Gleichung $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$.

(14 Punkte)

2. Finde Polynome $f(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ und $q_3(x)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= x \cdot q_1(x) \\ f(x) - x - 1 &= (x^2 + 1) \cdot q_2(x) \\ f(x) - x &= (x^2 + 2) \cdot q_3(x). \end{aligned}$$

(6 Punkte)

3. Löse die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$. (4 Punkte)