Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 6. November 2012, vor den Übungen

1. Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$ mit einer Primzahl p. Weiter sei $\mathbb{P}$ der Primkörper von K. Es sei L/K eine Körpererweiterung von K und $f_c(X) = X^p - X + c$ mit $c \in L$. Zeige:

   (a) Die Abbildung $\varphi\colon L \to L$, $x \to x^p$ ist ein Körperisomorphismus.

   (b) Ist $f_c(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in L$, so ist auch $f_c(\alpha + r) = 0$ für $r \in \mathbb{P}$. (6 Punkte)

2. Es sei K ein Körper. Unter dem Körper $K((X))$ der <u>formalen Laurentreihen</u> über K versteht man

$$K((X)) := \{f\colon \mathbb{Z} \to K\}.$$

   Für f schreibt man auch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)X^n.$$

   Addition und Multiplikation sind nach den bekannten Rechenregeln für Potenzreihen definiert. Konvergenzüberlegungen spielen keine Rolle. Es sei $K_0 := \{f \in K\colon f(n) = 0 \text{ für } n \neq 0\}$.

   (a) Zeige: $K((X))$ ist ein Körper.

   (b) Bestimme $[K((X))\colon K_0]$.

   (c) Vergleiche die Charakteristiken $\mathrm{char}(K((X)))$ und $\mathrm{char}(K_0)$. (9 Punkte)

3. Es seien $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ verschiedene komplexe Zahlen. Für $1 \leq j \leq n$ seien $m_j \in \mathbb{N}_0$ und $(a_{j,0}, \ldots, a_{j,m_j}) \in \mathbb{C}^{m_j}$. Weiter sei $N = \sum_{j=1}^{n}(m_j + 1)$.
   Zeige unter Verwendung des Chinesischen Restsatzes, dass es genau ein $f \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(f) \leq N-1$ gibt, so dass $f^{(k)}(z_j) = a_{j,k}$ für $0 \leq k \leq m_j$ und $1 \leq j \leq n$ erfüllt ist. (6 Punkte)

4. Löse die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. (3 Punkte)