ulm university universität ulm

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 13. November 2012, vor den Übungen

1. Es sei K ein Körper mit seinem Primkörper $\mathbb{P}$.
   Zeige, dass jeder Automorphismus von K ein $\mathbb{P}$- Automorphismus ist. (3 Punkte)

2. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2})$ und $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$.
   (a) Bestimme $[L\colon \mathbb{Q}]$.
   (b) Finde sämtliche Automorphismen von L.
   (c) Für $\sigma, \tau \in G(L/\mathbb{Q})$ seien
   $$\sigma(\sqrt{3}) = -\sqrt{3},\ \sigma(i) = i,\ \sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\zeta$$
   $$\tau(\sqrt{3}) = \sqrt{3},\ \tau(i) = -i,\ \tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\zeta^2.$$
   Bestimme $(\sigma \circ \tau)(\gamma)$ für $\gamma \in \{\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2}\}$. (6 Punkte)

3. Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$, wobei p eine Primzahl sei. Weiter seien $c \in K$, $d \in \mathbb{Z}$, $f(X) = X^p - X + c \in K[X]$ und $g(X) = X^p - X + d \in \mathbb{Q}[X]$. Es habe f keine Nullstelle in K, und α sei eine Nullstelle von f in einer Erweiterung von K. Zeige:
   (a) Es ist f in $K[X]$ irreduzibel.

   Hinweis:
   Betrachte Aufgabe 1 von Übungsblatt 3.

   (b) Die Gruppe $G(L/K)$ ist zyklisch von der Ordnung p.
   (c) Ist $d \not\equiv 0 \bmod p$, so ist g in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.
   (d) Es sei $h(x) = x^5 - x + 7$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von h.
   Bestimme $[\mathbb{Q}(\alpha)\colon \mathbb{Q}]$ und sämtliche Automorphismen von $\mathbb{Q}(\alpha)$. (6 Punkte)

4. Die Körper $GF(2) = \{0, 1\}$ und $GF(4) = \{0, 1, t, t + 1\}$ seien durch $1 + 1 = 0$ und $t^2 = t + 1$ bestimmt.
   (a) Bestimme $[GF(4)\colon GF(2)]$.
   (b) Es sei $g \in GF(4)[X]$ durch $g(X) = X^2 + X + t$ gegeben. Für u aus einem Erweiterungskörper von $GF(4)$ sei $g(u) = 0$. Weiter sei $GF(16) = GF(4)(u)$.
   Bestimme $G = G(GF(16)/GF(2))$ und zeige, dass G zyklisch ist.
   (c) Finde ein Polynom $h \in GF(16)[X]$, so dass für eine Nullstelle v von h in einem Erweiterungskörper von $GF(16)$ der Körper $L = GF(16)(v)$ genau 256 Elemente besitzt.
   (d) Zeige, dass $G(L/K)$ zyklisch ist. (6 Punkte)

5. Es sei L/K eine Körpererweiterung, $\alpha \in L$ und $[K(\alpha)\colon K] = p$ mit einer Primzahl $p > 2$.
   Zeige: $K(\alpha^2) = K(\alpha)$. (3 Punkte)