Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 20. November 2012, vor den Übungen

1. Es seien G und H endliche Gruppen und $\mathrm{Aut}(G)$ die Automorphismengruppe von G. Weiter sei $\Phi\colon H \to \mathrm{Aut}(G)$ mit $h \to \varphi_h$ ein Homomorphismus. Unter dem <u>semidirekten Produkt</u> $G \times_\Phi H$ von G und H versteht man folgende Gruppe: Es ist $G \times_\Phi H = \{(g,h)\colon g \in G, h \in H\}$, und die Verknüpfung der Elemente von $G \times_\Phi H$ ist durch $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2), h_1h_2)$ definiert.
   (a) Zeige, dass $G \times_\Phi H$ tatsächlich eine Gruppe ist.
   (b) Zeige, dass $G \times_\Phi H$ genau dann ein direktes Produkt ist, wenn $\varphi_h = id_{|G}$ für alle $h \in H$ ist.
   (c) Es sei G eine endliche Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $H \leq G$ eine Untergruppe von G, $G = NH$ und $N \cap H = \{e\}$. Weiter sei $\Phi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \to \varphi_h$ durch $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ für alle $n \in N$ definiert.
   Zeige: $G \cong N \times_\Phi H$. (8 Punkte)

2. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{3}, i)$. Weiter sei der Isomorphismus σ_s von $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})$ durch $\sigma_s\colon \sqrt[8]{3} \to \sqrt[8]{3}i^k$ für $s \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $k \in s$ definiert.
   (a) Bestimme $[L\colon \mathbb{Q}]$.
   (b) Finde die Fortsetzungen von σ_s zu den Automorphismen von L.
   (c) Zeige, dass $G(L/\mathbb{Q})$ zur Matrixgruppe
   $$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} : r \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*, s \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right\}$$
   isomorph ist.
   (d) Zeige, dass M_4 den zyklischen Normalteiler
   $$N_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & s \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} : s \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right\}$$
   und die Untergruppe
   $$U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\rangle$$
   besitzt.
   (e) Zeige, dass es genau einen Homomorphismus $\Phi\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ gibt, so dass $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \times_\Phi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nicht abelsch ist.
   Zeige: $G(L/\mathbb{Q}) \cong M_4 \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times_\phi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
   (f) Es sei $Q = \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$ die Menge der Ecken eines Quadrats im Raum $\mathbb{R}^2$, und D_4 sei die Gruppe aller orthogonalen Abbildungen $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{B}(Q) = Q$.
   Weiter sei $\mathcal{W} = \{\sqrt[8]{3}i^k\colon k \in \{0,1,2,3\}\}$. Finde einen Isomorphismus $\psi\colon D_4 \to G(L/\mathbb{Q})$ und eine Bijektion $\rho\colon Q \to \mathcal{W}$, so dass $\psi(\mathcal{B}) \circ \rho = \rho \circ \mathcal{B}$ für alle $\mathcal{B} \in D_4$ gilt. (16 Punkte)