# Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 27. November 2012, vor den Übungen

1. Es seien $p$ eine Primzahl, $K$ ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$, zudem $Q$ der Quotientenkörper von $K[X]$ und $X$ eine Unbestimmte über $K$. Weiter sei $f(Y) \in Q[Y]$ durch $f(Y) = Y^p - X$ gegeben.
   (a) Zeige, dass $f$ in $Q[Y]$ irreduzibel ist.
   (b) Es sei $u$ eine Nullstelle von $f$ in einem Erweiterungskörper von $Q$.
   Bestimme Grad und reduzierten Grad von $u$ über $Q$. (8 Punkte)

2. Es seien $K$ ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$, wobei $p$ eine Primzahl sei, und $f \in K[X]$ irreduzibel.
   (a) Zeige, dass es ein $l \in \mathbb{N}_0$ und ein separables Polynom $g \in K[X]$ gibt, so dass
   $$f(X) = g\left(X^{p^l}\right)$$
   gilt.
   (b) Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die verschiedenen Nullstellen von $f$ in einem Zerfällungskörper $Z$.
   Zeige, dass ein $c \in K$ und ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit
   $$f(X) = c \cdot (X - \alpha_1)^{p^l} \cdots (X - \alpha_r)^{p^l}$$
   gibt. (8 Punkte)

3. Es seien
   $$A = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
   und $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ der Vektorraum der Dimension 3 über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   Für $l \in \mathbb{N}_0$ sei der Automorphismus $\tau_l$ durch
   $$\tau_l \colon G \to G, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to A^l \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
   gegeben.
   (a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi \colon (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +) \to \mathrm{Aut}(G)$, $\overline{r} \to \tau_l$ mit $l \in \overline{r}$ wohldefiniert und ein Homomorphismus ist.
   (b) Betrachte das semidirekte Produkt $H := G \times_\Phi \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und berechne
   $$\left( \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, 3 \bmod 7 \right) \times_\Phi \left( \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, 2 \bmod 7 \right).$$
   (8 Punkte)