Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 22. Juni 2012, vor den Übungen

1. Der Doppelkegel $K \subset \mathbb{R}^3$ sei durch $K = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\}$ definiert.
   Die Teilmenge $Q \subset \{(x_1, x_2, 0) \colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ sei durch eine der Gleichungen in der Tabelle von Beispiel 7.4.4 mit Ausnahme der ersten drei (leere Menge und zwei parallele Geraden) gegeben.
   Zeige: es gibt eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, so dass $K \cap E$ zu Q kongruent ist.

   Hinweis:
   Die Ebene E kann in der Form $z = (\tan\alpha) \cdot x + c$ angenommen werden. Führe die ONB $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ mit $\vec{b}_1 = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)^T$ und $\vec{b}_2 = (0, 1, 0)^T$ ein. (5 Punkte)

2. (a) Die quadratischen Formen $Q_i \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ seien durch

   $$\begin{aligned} Q_1(\vec{x}) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ Q_2(\vec{x}) &= \frac{x^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_2^2} + \frac{z^2}{c_3^2} \end{aligned}$$

   mit $\vec{x} = (x, y, z)^T$ und $c_1 > c_2 > c_3$ gegeben.
   Weiter seien

   $$S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon Q_1(\vec{x}) = 1\} \quad \text{und} \quad E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon Q_2(\vec{x}) = 1\}.$$

   Bestimme diejenigen Vektoren $\vec{x} \in S^2$, für die $Q_2(\vec{x})$ Maximum und Minimum annimmt sowie diejenigen Vektoren $\vec{x} \in E$, für die $Q_1(\vec{x})$ Maximum und Minimum annimmt.
   Löse nun noch dieselbe Frage, wenn die Vektoren als zusätzliche Bedingung auf den Unterraum $U = \{(x, y, 0)^T \colon x, y \in \mathbb{R}\}$ beschränkt sind.

   (b) Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch und habe die Eigenwerte $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$.
   Gib Unterräume U_i an, so dass das Maximum von $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x}$ für $\vec{x} \in U_i$ und $||\vec{x}|| = 1$ gerade in dem zu λ_i zugehörigen Eigenvektor angenommen wird. (8 Punkte)

3. (a) Es sei $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, \ldots, 6\}$ der Körper mit sieben Elementen und $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$.
   Zeige: f ist in $\mathbb{F}_7[x]$ irreduzibel.

   (b) Es sei $P(x)$ ein reelles Polynom mit $P(x) = x^5 - 10x^4 + 64x^3 - 176x^2 + 228x - 136$, welches die Nullstellen $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 3 + 5i$ besitze.
   Bestimme die übrigen Nullstellen und zerlege $P(x)$ in Linearfaktoren. (7 Punkte)

4. Es seien $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ bzw. $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, t, t + 1\}$ die Körper mit zwei bzw. vier Elementen und K ein Körper mit $\mathbb{F}_4 \subset K$. Zeige:

   (a) Das Polynom $f(x) = x^2 + x + 1$ ist als Polynom von $\mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel, aber nicht als Polynom von $\mathbb{F}_4[x]$. Stelle f als Produkt von irreduziblen Polynomen aus $\mathbb{F}_4$ dar.

   (b) Es gibt kein $u \in K - \mathbb{F}_4$ mit $u^2 = u + 1$. (4 Punkte)