Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 13. Juli 2012, vor den Übungen

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$, der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ sowie $||\cdot||_2$ die Euklidische Norm mit $||\vec{x}||_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $||\cdot||_V$ eine beliebige Vektornorm auf V gegeben.
   Weiter sei $S = \{\vec{x} \in V : ||\vec{x}||_2 = 1\}$ die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Es sei $M = \max_{1 \le i \le n} ||\vec{e}_i||_V$. Zeige:
   (a) Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $||\vec{x}||_V \le C||\vec{x}||_2$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Drücke C durch M aus.
   (b) Die Abbildung $||\cdot||_V : V \to [0, \infty)$, $\vec{x} \to ||\vec{x}||_V$ ist auf S stetig: ist also $\vec{x}_0 \in S$, so gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon, \vec{x}_0) > 0$, so dass $|||\vec{x}||_V - ||\vec{x}_0||_V| < \epsilon$ für alle $\vec{x}$ mit $||\vec{x} - \vec{x}_0||_2 < \delta$ gilt.
   (c) Die Abbildung $||\cdot||_V$ nimmt auf S Maximum und Minimum an.
   Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass S kompakt ist.
   (d) Die Normen $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_V$ sind äquivalent. (8 Punkte)

2. (a) Zeige: Ist $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, so ist $G(\mathcal{A}) = \{e^{t\mathcal{A}} : t \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von $GL(n, K)$.
   (b) Bestimme $G(\mathcal{A})$ für
   $$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (c) Für $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sei $\mathcal{F}(t) = \exp(t \cdot (\mathcal{A} + \mathcal{A}^T))$.
   Zeige: Es ist $\mathcal{F}(t) = \mathcal{E}_n + t \cdot (\mathcal{A} + \mathcal{A}^T) + \mathcal{R}(t)$ mit $||\mathcal{R}(t)||_2 \le t^2 \cdot e^{2||\mathcal{A}||_2}$ für alle $|t| \le 1$.
   (d) Bestimme $\mathcal{F}'(0)$.
   (e) Zeige, dass $G(\mathcal{A})$ genau dann eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(n)$ ist, wenn $\mathcal{A}^T = -\mathcal{A}$ gilt. (8 Punkte)

3. (a) Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K^{(n,n)}$ mit $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ und $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeige
   $$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \mathcal{A}^k \mathcal{B}^{m-k}.$$
   (b) Es sei die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit
   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 8 \\ -8 & -10 & -4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
   gegeben. Finde eine Matrix $\mathcal{X} \in GL(3, \mathbb{R})$, so dass $\mathcal{A} = \mathcal{X}(\Lambda + \mathcal{N})\mathcal{X}^{-1}$ ist, wobei Λ Diagonalgestalt hat und $\mathcal{N}$ nilpotent ist.
   (c) Bestimme $\mathcal{A}^{50}$ und $e^{\mathcal{A}}$. (8 Punkte)