Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 25. Mai 2012, vor den Übungen

1. Es seien $V = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller Polynome und dessen Unterraum $U = \{q(x) \in V\colon\ \deg(q) \leq 3\}$ gegeben. Weiter sei $b(p,q)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ über

$$b(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx$$

definiert. Ohne Beweis darf vorausgesetzt werden, dass (V, b) ein Euklidischer Vektorraum ist.

(a) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ von U mit $\deg(L_k) = k$.

(b) Bestimme $p(x) \in U$, so dass folgender Ausdruck minimal wird:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - p(x))^2\, dx$$

Hinweis:

Der Wert des Integrals braucht nicht berechnet zu werden.

(c) Bestimme die Nullstellen n_i mit $i \in \{1,2,3\}$ von L_3.

(d) Bestimme Konstanten $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1,2,3\}$, so dass folgende Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 1\, dx &= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 1 \\ \int_{-1}^{1} x\, dx &= \lambda_1 \cdot n_1 + \lambda_2 \cdot n_2 + \lambda_3 \cdot n_3 \\ \int_{-1}^{1} x^2\, dx &= \lambda_1 \cdot n_1^2 + \lambda_2 \cdot n_2^2 + \lambda_3 \cdot n_3^2 \end{aligned}$$

(e) Es sei P ein Polynom mit $\deg(P) \leq 5$. Es darf ohne Beweis folgende Tatsache aus der Analysis verwendet werden:

Es gibt Polynome q und r mit $\deg(q) \leq 2$ und $\deg(r) \leq 2$, so dass $P = q \cdot L_3 + r$ gilt.

Zeige:

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \int_{-1}^{1} r(x)\, dx.$$

(f) Zeige, dass für alle Polynome P mit $\deg(P) \leq 5$ folgende Aussage gilt:

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \frac{5}{9} \cdot P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} \cdot P(0) + \frac{5}{9} \cdot P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

(g) Finde ein Polynom P mit $\deg(P) = 6$, für das die Aussage in Teilaufgabe f) nicht gilt.

Hinweis:

Das Polynom P kann so gewählt werden, dass die rechte Seite in Teilaufgabe f) verschwindet, was fast ohne Rechnung gesehen werden kann. (8 Punkte)

2. Es sei das lineare Gleichungssystem $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeige, dass dieses LGS unlösbar ist.

(b) Bestimme alle Näherungslösungen $\vec{x}_0$ für dieses Gleichungssystem, so dass $||\mathcal{A}\vec{x}_0 - \vec{b}||$ bzgl. des Standardskalarproduktes minimal wird. (4 Punkte)

3. Es sei der Vektorraum $K^{(m,n)}$ und das darauf definierte Skalarprodukt $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle_{\text{Spur}} = \text{Spur}(\mathcal{B}^* \mathcal{A})$ mit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K^{(m,n)}$ gegeben.

(a) Zeige, dass für alle $\vec{x} \in K^n$ die Abschätzung $||\mathcal{A}\vec{x}|| \leq ||\mathcal{A}|| \cdot ||\vec{x}||$ gilt.

Hinweis:
Es bedeutet dabei $||\mathcal{A}||$ die Norm, die von dem Skalarprodukt $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle_{\text{Spur}}$ erzeugt wird sowie $||\mathcal{A}\vec{x}||$ bzw. $||\vec{x}||$ die Standardnormen auf dem K^m bzw. auf dem K^n.

(b) Zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ und $m = n$ sowie einer symmetrischen Matrix $\mathcal{A}$ und einer schiefsymmetrischen Matrix $\mathcal{B}$, d.h. $\mathcal{B}^T = -\mathcal{B}$, stets $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle_{\text{Spur}} = 0$ gilt.

(3 Punkte)

4. Es sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Unterräumen U und W. Zeige:

(a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ für endlichdimensionale U und W. (3 Punkte)

5. Es seien V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum, $\mathcal{M} \subset V$ nichtleer und U ein Unterraum von V. Unter der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathcal{M}}$ von V versteht man $\overline{\mathcal{M}} = \{\vec{v} \in V : d(\vec{v}, \mathcal{M}) = 0\}$. Die Menge $\mathcal{M}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ gilt. Zeige:

(a) Die Menge $\overline{\mathcal{M}}$ ist abgeschlossen.

(b) Ist $\dim U < \infty$, so ist U abgeschlossen.

(c) Das orthogonale Komplement $U^\perp$ ist abgeschlossen.

(d) Es gilt $\overline{U} \subset (U^\perp)^\perp$.

(e) Gib eine Beispiel eines Vektorraums V mit Unterraum U, in denen U nicht abgeschlossen ist. Die Richtigkeit des Beispiels ist zu begründen. (4 Punkte)

6. (a) Es sei $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ nilpotent, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}^m = 0$.
Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von $\mathcal{A}$ ist.

(b) Es sei $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ idempotent, d.h. es es gilt $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.
Zeige: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $\mathcal{A}$, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$. (2 Punkte)