Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24-6=18 Punkte
Abgabe: Freitag, 8. Juni 2012, vor den Übungen

1. Es sei die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ mit
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
welche den Eigenwert $\lambda = 4$ besitzt, gegeben.
   (a) Bestimme die geometrische Ordnung des Eigenwerts $\lambda = 4$.
   (b) Zeige ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms von $\mathcal{A}$, dass 0 ein Eigenwert der Matrix $\mathcal{A}$ ist.
   (c) Gib eine orthogonale Matrix $\mathcal{X}$ an, so dass $\mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{X}$ Diagonalgestalt hat. (4 Punkte)

2. Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und die Folge der in Linearer Algebra I auf Übungsblatt 7 bereits betrachteten Fibonacci- Zahlen mit $f(0) = f(1) = 1$ und $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$ gegeben.
Weiter sei $\vec{x}_n := (f(n),\ f(n+1))^T$.
   (a) Zeige, dass die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ mit $\mathcal{A}\vec{x}_n = \vec{x}_{n+1}$ die Gestalt
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
besitzt.
   (b) Zeige: Für alle $n \geq 2$ gilt
$$\mathcal{A}^n = \begin{pmatrix} f(n-2) & f(n-1) \\ f(n-1) & f(n) \end{pmatrix}.$$
   (c) Bestimme die Eigenwerte von $\mathcal{A}$ sowie die zugehörigen Eigenvektoren.
   (d) Zeige damit die Binetsche Formel, die eine explizite Darstellung für die n- te Fibonaccizahl angibt:
$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$
   (e) Zeige: Die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{F}_2^{(2,2)}$ hat keine Eigenwerte.
   (f) Was gilt für $\mathcal{A} \in \mathbb{F}_4^{(2,2)}$
Lässt sich die Diagonalisierung durchführen? (9 Punkte)

3. Zeige, dass zu jeder Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine unitäre Matrix $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ existieren, so dass

$$\mathcal{U}^* \mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gilt, also $\mathcal{U}^* \mathcal{A} \mathcal{U}$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist. (5 Punkte)

4. **Diese Aufgabe wird auf die nächste Woche verschoben, da deren zugrundeliegende Aufgabe von Übungsblatt 7 noch nicht vorgerechnet wurde:**

   (a) Es seien n ungerade, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\mathcal{A}^T = -\mathcal{A}$. Zeige: $\det \mathcal{A} = 0$.

   (b) Es seien $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(2n,2n)}$, $\mathcal{A}^T = -\mathcal{A}$ und $\det \mathcal{A} \neq 0$.
   Zeige, dass ein $\mathcal{P} \in GL(2n, \mathbb{R})$ existiert, so dass

$$\mathcal{P}^T \mathcal{A} \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_n \\ -\mathcal{E}_n & 0 \end{pmatrix}$$

   ist.

   Hinweis:
   Verwende Übungsaufgabe 4 von Übungsblatt 7.

   (c) Es sei

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Bestimme $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ mit

$$\mathcal{P}^T \mathcal{A} \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)