ulm university universität uulm

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24+6=30 Punkte
Abgabe: Freitag, 15. Juni 2012, vor den Übungen

1. Eine Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt normal, wenn $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ gilt.

   (a) Zeige, dass eine obere Dreiecksmatrix genau dann normal ist, wenn sie eine Diagonalmatrix ist.

   (b) Zeige, dass eine Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ genau dann normal ist, wenn sie unitär diagonalisierbar ist, d.h. wenn eine unitäre Matrix $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit

   $$\mathcal{U}^*\mathcal{A}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   existieren.

   (c) Überprüfe folgende Matrizen auf unitäre Diagonalisierbarkeit:

   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (d) Sollte die unitäre Diagonalisierung nicht durchführbar sein, so überprüfe die Matrizen auf Diagonalisierbarkeit.

   (e) Bestimme eine unitäre Matrix $\mathcal{U}$, so dass $\mathcal{U}^*\mathcal{C}\mathcal{U}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. (16 Punkte)

2. Es sei die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ -3 & 14 & 2 \\ 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   (a) Überprüfe die Matrix $\mathcal{A}$ auf Definitheit.

   (b) Führe für $\mathcal{A}$ die Hauptachsentransformation durch, d.h. schreibe die zugehörige quadratische Form $Q(\vec{x})$ als Summe von Quadraten. (8 Punkte)

3. Aufgabe 4 von Übungsblatt 8 (6 Punkte)