ulm university universität ulm

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 29. Juni 2012, vor den Übungen

1. Es sei K ein Körper und $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die kanonische Basis des K^n.
   Weiter sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{(n,n)}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad i = j+1, \text{ mit } 1 \le j \le n-1 \text{ und für } i = 1,\ j = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Es sei $\varphi_{\mathcal{A}} \colon K^n \to K^n$, $\vec{x} \to \mathcal{A}\vec{x}$ der zu $\mathcal{A}$ gehörige Endomorphismus. Zeige:

   (a) Die Vektoren $\vec{e}_1, \mathcal{A}\vec{e}_1, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}\vec{e}_1$ sind linear unabhängig.

   (b) Das Minimalpoynom von $\mathcal{A}$ ist $m(x) = x^n - 1$.

   (c) Es sei $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_n$. Dann ist $\mathcal{A}\vec{b}_1 = \vec{b}_1$.

   (d) Es sei $K = \mathbb{R}$ und $n = 6$.
   Stelle das Minimalpolynom $m(x)$ als Produkt von Potenzen irreduzibler Polynome dar, also $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, und bestimme Basen für die $\varphi_{\mathcal{A}}$- invarianten Unterräume U_i, so dass $p_i^{\alpha_i}$ die Minimalpolynome von $\varphi_{\mathcal{A}|_{U_i}}$ sind. Bestimme eine zu $\mathcal{A}$ ähnliche Matrix $\mathcal{M}$ von der Gestalt

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \mathcal{M}_1 & \\ 0 & & & \mathcal{M}_2 \end{pmatrix}$$

   mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und quadratischen Teilmatrizen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathbb{R}^{(2,2)}$. (8 Punkte)

2. Es sei K ein Körper, $l, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$, und $m(x) = a_0 + \ldots + a_{l-1}x^{l-1} + x^l$ mit $a_i \in K$ für $0 \le i \le l-1$ sei in $K[x]$ irreduzibel. Weiter sei $m(x)$ das Minimalpolynom von $\mathcal{A}$ und die Menge $L = \{c_0\mathcal{E}_n + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_{l-1}\mathcal{A}^{l-1} \colon c_i \in K\}$ gegeben. Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass $(L, +, \cdot)$ mit der Matrizenaddition und der Multiplikation von Matrizen mit Skalaren $c \in K$ einen Vektorraum über K darstellt.
   Zeige:

   (a) Es gilt $\dim L = l$.

   (b) Es bildet L mit der Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper
   Es brauchen dazu nur die Existenz von Null- und Einselement, die Abgeschlossenheit der Multiplikation und die Existenz des multiplikativen Inversen gezeigt werden.

   Hinweis:
   Abgeschlossenheit der Multiplikation: Dividiere $f_1(x) \cdot f_2(x)$ durch $m(x)$ mit Rest.
   Existenz des Inversen: es gibt $h_1, h_2 \in K[x]$ mit $h_1 f + h_2 m = 1$. (7 Punkte)

3. Es sei K ein Körper,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{(2,2)}$$

und $P_{\mathcal{A}}$ das charakteristische Polynom von $\mathcal{A}$.

(a) Zeige durch Nachrechnen: $P_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0^{(2,2)}$.

(b) Finde das Minimalpolynom von $\mathcal{A}$.

Hinweis:
Es ist eine Fallunterscheidung notwendig. (5 Punkte)

4. Es sei

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_7\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^7$.

(a) Bestimme $\varphi_{\mathcal{A}}$- invariante Unterräume der Form $U_i = \langle \vec{e}_{l_1} + \ldots + \vec{e}_{l_r} \rangle$.

(b) Bestimme das Minimalpolynom von $\mathcal{A}$. (4 Punkte)