Skriptum zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

Sommersemester 2007

Prof. Dr. Helmut Maier
Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Daniel Haase

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Riemannsche Zeta-Funktion und der Primzahlsatz

1.1 Einleitung

Die Primzahlen standen seit jeher im Mittelpunkt des Interesses vieler Mathematiker. Euklid konnte um 300 v.Chr. die Existenz von unendlich vielen Primzahlen beweisen. Zur feineren Untersuchung führt man die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) \;=\; \big|\{p \le x \;:\; p\,\mathrm{prim}\}\big| \;=\; \sum_{p\le x} 1$$

ein. Hierbei gilt die Konvention, an die wir uns auch künftig halten wollen, dass der Buchstabe p unter einem Summen- bzw. Produktzeichen bedeutet, dass die Summe bzw. das Produkt nur über Primzahlen erstreckt wird. Der Primzahlsatz, der 1792 von Gauß vermutet, aber erst 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin unabhängig voneinander bewiesen werden konnte, besagt, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \;=\; 1$$

ist. Die Beweise von Hadamard und de la Vallée-Poussin waren funktionentheoretischer Natur und beruhten auf der Beziehung zwischen Primzahlen und der Riemannschen Zeta-Funktion. Diese Beziehung wurde als erstes von Euler im 18. Jahrhundert entdeckt, der die Zeta-Funktion nur als Funktion einer reellen Variable betrachtete:

Definition 1.1.1. Die Zeta-Funktion ist

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für $s > 1$.

Satz 1.1.2 (Euler). *Die Zeta-Funktion besitzt für $s > 1$ die Produktdarstellung*

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\,.$$

Bemerkung 1.1.3. Dieses Produkt wird auch Eulerprodukt genannt.

Beweis. Die Produktdarstellung ist eine Folge des Fundamentalsatzes der Arithmetik: jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen:

$$n \;=\; \prod_p p^{\alpha(p)} \;\;,\;\; \alpha(p) \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha(p) > 0 \text{ nur für endlich viele } p\,.$$

Wir betrachten nun das Produkt

$$\prod_{p\le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \prod_{p\le y} \left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\cdots\right)\,.$$

Da die endlich vielen geometrischen Reihen in dem Produkt absolut konvergieren, darf das Produkt ausmultipliziert und die Summanden beliebig angeordnet werden:

$$\prod_{p\le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \sum{}' \,(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r})^{-s}\,,$$

wobei in Σ' sämtliche Produkte von Primzahlpotenzen $p_j^{\alpha_j}$ mit $p_j \le y$ vorkommen. Nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik ergibt sich

$$\prod_{p\le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \sum{}'' n^{-s}\,,$$

wobei in Σ'' sämtliche natürlichen Zahlen n vorkommen, die nur Primfaktoren $p \le y$ besitzen, insbesondere auch alle $n \le y$. Damit folgt

$$\left|\prod_{p\le y} \frac{1}{1-p^{-s}} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right| \;\le\; \sum_{n>y} n^{-s}\,,\ \text{also}\ \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \lim_{y\to\infty}\prod_{p\le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \;=\; \zeta(s)\,.$$

□

Riemann betrachtete 1859 die Zeta-Funktion erstmals als Funktion der komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$, und zeigte unter Anderem, dass sich $\zeta(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen lässt. Er stellte außerdem einige Vermutungen auf, die zum Teil 1894 von v. Mangoldt bewiesen wurden. Die berühmte Riemannsche Vermutung bleibt bis heute unbewiesen. 1896 bewiesen dann Hadamard und de la Vallée-Poussin den Primzahlsatz unter Verwendung der analytischen Eigenschaften von $\zeta(s)$. Wir werden in diesem Kapitel die grundlegenden analytischen Eigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion besprechen und dann den Beweis des Primzahlsatzes geben. Wir werden dabei jedoch nicht der Methode von Hadamard und de la Vallée-Poussin folgen, sondern im Wesentlichen eine Methode von Edmund Landau benützen. Zunächst werden wir einige elementare Hilfsmittel besprechen.

1.2 Die Verwendung der Symbole O und o

Der Primzahlsatz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \;=\; 1$$

lässt sich auch folgendermaßen formulieren: Für $x \ge 2$ gilt

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)} \;+\; R(x)\,, \tag{1}$$

wobei für das Restglied $R(x)$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x/\log(x)} \;=\; 0\,.$$

Der Term $\frac{x}{\log(x)}$ heißt Hauptglied. Beziehungen der Form

$$\text{Unbekannte Funktion} \;=\; \text{Hauptglied} \;+\; \text{Restglied}\,,$$

wobei das Hauptglied explizit bekannt ist, während für das Restglied eine Abschätzung gegeben ist, sind zentral in der analytischen Zahlentheorie. Zur Vereinfachung der Formulierung hat E. Landau die nach ihm benannten O- und o-Symbole eingeführt. Die Beziehung (1) wird mittels dieser Symbole folgendermaßen formuliert:

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)} \;+\; o\left(\tfrac{x}{\log(x)}\right) \quad (x\to\infty)$$

oder auch

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)}\cdot(1+o(1)) \quad (x\to\infty)\,.$$

Definition 1.2.1. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die für genügend große positive x definiert sind, und es sei $f(x)$ beliebig komplex, $g(x) > 0$, eventuell nur für genügend große x. Dann soll

$$f(x) \;=\; O\left(g(x)\right) \;\text{ bzw. }\; f(x) \;=\; o\left(g(x)\right) \quad (x \to \infty)$$

bedeuten, dass für genügend große x gilt:

$$|f(x)| \;\le\; A \cdot g(x) \text{ für passendes } A > 0 \;\text{ bzw. }\; \frac{|f(x)|}{g(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Analog mögen die Beziehungen

$$f(x) \;=\; O\left(g(x)\right) \;\text{ bzw. }\; f(x) \;=\; o\left(g(x)\right) \quad (x \to a+) \text{ oder } (x \to a-)$$

definiert sein, wobei $g(x) > 0$ für x nahe bei a vorausgesetzt ist.

Beispiel 1.2.2. Es gilt

$$\sqrt{x^2+1} \;=\; x + O\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad (x \to \infty) \quad , \quad \frac{1}{\log(x)} \;=\; O\left(\tfrac{1}{x-1}\right) \quad (x \to 1+)\,.$$

1.3 Abelsche partielle Summation und Eulersche Summenformel

Unser Studium der Riemannschen Zeta-Funktion wird uns später nicht direkt die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ liefern, sondern die leicht veränderte Funktion

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{p\le x} \log(p)\,,$$

bei der also jede Primzahl mit „Gewicht“ $\log(p)$ gezählt wird. Das Verfahren, solche regelmäßigen (d. h. stetig-differenzierbaren) Gewichte hinzuzufügen bzw. zu entfernen, liefert

Satz 1.3.1 (Abelsche partielle Summation). *Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $c_1, c_2, \ldots$ komplexe Zahlen. Es sei $f:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig-differenzierbare Funktion. Dann setze für $x \in [a,b]$*

$$c(x) \;=\; \sum_{a<n\le b} c_n\,,$$

dann gilt

$$\sum_{a<n\le b} c_n f(n) \;=\; -\int_a^b c(t) f'(t)dt \;+\; c(b)f(b)\,.$$

Beweis. Es ist

$$c(b)f(b) - \sum_{a<n\le b} c_n f(n) \;=\; \sum_{a<n\le b} c_n(f(b) - f(n)) \;=\; \sum_{a<n\le b} \int_n^b c_n f'(t)dt \;=\; \int_a^b \left(\sum_{a<n\le t} c_n\right) f'(t)dt\,.$$

□

Satz 1.3.2 (Eulersche Summenformel). *Es seien $a < x$ reelle Zahlen. Die Funktion $g:\,[a,x] \to \mathbb{C}$ sei stetig und (stückweise) stetig-differenzierbar auf $[a,x]$. Wir setzen $P_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, dann ist*

$$\sum_{a<n\le x} g(n) \;=\; \int_a^x g(u)du \;+\; \int_a^x P_0(u)g'(u)du \;-\; g(x)P_0(x) \;+\; g(a)P_0(a)\,.$$

Beweis: In der Übung. □

1.4 Dirichletsche Reihen

Bevor wir zur Diskussion der Riemannschen Zeta-Funktion als Funktion der komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$ kommen, wollen wir die allgemeine Funktionsklasse diskutieren, der die Zeta-Funktion angehört, die Dirichletschen Reihen.

Definition 1.4.1. Eine Dirichletreihe ist eine unendliche Reihe der Form

$$D(s) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \ \ , \ \ a_n \in \mathbb{C} \ , \ s \in \mathbb{C} \, .$$

Es stellt sich sofort die Frage nach dem Konvergenzbereich von $D(s)$ und nach den analytischen Eigenschaften - insbesondere Holomorphie - von $D(s)$ in diesem Bereich. Im Zusammenhang mit Dirichletschen Reihen ist die Schreibweise $s = \sigma + it$, $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $t = \mathrm{Im}(s)$ üblich (oder, falls eine Folge vorliegt, $s_j = \sigma_j + it_j$).

Satz 1.4.2. *Es sei*

$$D(s) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

in einem Punkt s_0 konvergent, dann konvergiert $D(s)$ gleichmäßig im Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ für festes $\delta > 0$. Die Funktion $D(s)$ ist in der Halbebene $\{\sigma > \sigma_0\}$ holomorph.

Beweis. Mit partieller Summation (Satz 1.3.1) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{M<n\le N} a_n n^{-s} \ &= \ \sum_{M<n\le N} a_n n^{-s_0} n^{s_0 - s} \\ &= \ N^{s_0-s} \sum_{M<n\le N} a_n n^{-s_0} - \int_M^N \left(\sum_{M<n\le u} a_n n^{-s_0} \right) (s_0 - s) u^{s_0-s-1} du \, . \end{aligned}$$

Es ist $|N^{s_0-s}| = N^{\sigma_0-\sigma} \le 1$. Wegen der Konvergenz von $\sum a_n n^{-s_0}$ ist

$$\left| \sum_{M<n\le u} a_n n^{-s_0} \right| \ < \ \varepsilon$$

für $M > M_0(\varepsilon)$ groß genug und jedes $u > M$, und damit

$$\left| N^{s_0-s} \cdot \sum_{M<n\le N} a_n n^{-s} \right| \ < \ \varepsilon$$

im Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$. Es ist

$$\left|(s_0 - s) u^{s_0-s-1}\right| \ \le \ \frac{1}{\sin(\delta)} \cdot (\sigma - \sigma_0) u^{\sigma-\sigma_0-1}$$

und damit

$$\left| \int_M^N \left(\sum_{M<n\le u} a_n n^{-s_0} \right) (s_0 - s) u^{s_0-s-1} du \right| \ \le \ \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)} M^{\sigma_0-\sigma} \ \le \ \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)} \, .$$

Damit folgt der erste Teil des Satzes. Jede kompakte Teilmenge von $\{s = \sigma + it \ : \ \sigma > \sigma_0\}$ ist für $\delta > 0$ genügend klein im Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ enthalten. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

ist damit kompakt konvergent in $\{\sigma > \sigma_0\}$, und damit holomorph. □

Satz 1.4.3. *Zu jeder Dirichletreihe*

$$D(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

gibt es stets ein $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *so dass* $D(s)$ *für alle* $s = \sigma + it$ *mit* $\sigma > \sigma_0$ *konvergiert, und für* $\sigma < \sigma_0$ *divergiert.*

Beweis. Man setze

$$\sigma_0 \;=\; \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} \;:\; \exists s = \sigma + it : \sum a_n n^{-s} \text{ konvergiert}\right\} ,$$

Die Behauptung folgt dann aus dem vorigen Satz. □

Definition 1.4.4. Der Wert σ_0 heißt Konvergenzabszisse der Dirichletreihe $D(s)$.

Die Fälle $\sigma_0 = \pm\infty$ können eintreten:

Beispiel 1.4.5. Die Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^{-s}$$

konvergiert für kein $s \in \mathbb{C}$, hat also die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = \infty$. Dagegen konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{-s}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ und hat die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = -\infty$. Auch alle Dirichletpolynome

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad , \quad a_n \neq 0 \text{ nur endlich oft}$$

haben die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = -\infty$.

1.5 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Definition 1.5.1. Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ ist definiert durch

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für $\sigma > 1$.

Satz 1.5.2. *Die Riemannsche Zeta-Funktion stellt für* $\sigma > 1$ *eine holomorphe Funktion dar. Sie besitzt dort das Eulerprodukt*

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \, .$$

Insbesondere ist $\zeta(s) \neq 0$.

Beweis. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$$

konvergiert für $\sigma > 1$. Die Existenz des Eulerprodukts wird wie im reellen Fall (Satz 1.1.2) bewiesen. □

Die Untersuchung der Primzahlverteilung wird durch die Tatsache ermöglicht, dass die Zeta-Funktion meromorph fortgesetzt werden kann. In einem ersten Schritt setzen wir sie auf den Bereich $\{\sigma > 0\}$ fort.

Satz 1.5.3. *Die Riemannsche Zeta-Funktion lässt sich meromorph fortsetzen auf den Bereich* $\{\sigma > 0\}$. *Die einzige Singularität ist ein Pol erster Ordnung in* $s = 1$ *mit Residuum* 1.

Beweis. Anwendung der Eulerschen Summenformel 1.3.2 für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig klein ergibt

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \;=\; \int_{1-\varepsilon}^{\infty} u^{-s} du \;+\; s \int_{1-\varepsilon}^{\infty} P_0(u) u^{-s-1} du \;+\; (1-\varepsilon)^{-s} \cdot P_0(1-\varepsilon)$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{=} \int_{1}^{\infty} u^{-s} du \;+\; s \int_{1}^{\infty} P_0(u) u^{-s-1} du \;+\; \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{1-s} \;+\; s \int_{1}^{\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}} du \;+\; \frac{1}{2}\,.$$

Wegen $|P_0(u)| = |u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ ist die Folge

$$\int_{1}^{N} \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}} du$$

kompakt konvergent in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$. Also stellt

$$s \int_{1}^{\infty} P_0(u) u^{-s-1} du$$

eine in $\mathrm{Re}(s) > 0$ holomorphe Funktion dar. Die übrigen Summanden sind dort ebenfalls holomorph, außer in $s = 1$, da dort $\frac{1}{1-s}$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum Eins aufweist. □

1.6 Fouriertheorie und Poissonsche Summenformel

Definition 1.6.1. Im Rest der Vorlesung verwenden wir die Bezeichnung $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Definition 1.6.2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion der Periode 1, d. h. $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(n) \;=\; \int_{0}^{1} f(t) e(-nt) dt$$

der n-te <u>Fourierkoeffizient</u> von f. Unter der <u>Fourierreihe</u>

$$S_f(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e(nx)$$

von f versteht man die Folge der Partialsummen

$$S_f(x, N) \;=\; \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e(nx)\,.$$

Die Fourierreihe $S_f(x, N)$ heißt konvergent in $x \in \mathbb{R}$ falls

$$\lim_{N \to \infty} S_f(x, N)$$

existiert.

Eine zentrale Frage der Fouriertheorie ist, wann eine Funktion f durch ihre Fourierreihe darstellbar ist, d. h. wann

$$\lim_{N \to \infty} S_f(x, N) \;=\; f(x)$$

ist. Dies kann beispielsweise garantiert werden, wenn f auf $\mathbb{R}$ stetig-differenzierbar ist. Ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium dieser Fragen sind die Dirichlet- und Fejérkerne:

Definition 1.6.3. Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Der N-te Dirichletkern D_N ist gegeben durch

$$D_N(x) \;=\; \sum_{n=-N}^{N} e(nx)\,.$$

Der N-te Fejérkern F_N ist gegeben durch

$$F_N(x) \;=\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} D_n(x)\,.$$

Es ist nun möglich, die Partialsummen $S_f(x,N)$ mittels des Dirichletkerns D_N darzustellen. Die arithmetischen Mittel der Partialsummen können dann mittels der Fejérkerne F_N dargestellt werden:

Satz 1.6.4. *Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$S_f(x,N) \;=\; \int_0^1 f(t)D_N(x-t)dt \;\; \textit{sowie} \;\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} S_f(x,n) \;=\; \int_0^1 f(t)F_N(x-t)dt\,.$$

Beweis. Es gilt

$$\int_0^1 f(t)D_N(x-t)dt \;=\; \sum_{n=-N}^{N}\left(\int_0^1 f(t)e(-nt)dt\right)e(nx) \;=\; \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e(nx) \;=\; S_f(x,N)\,.$$

Daraus folgt auch die zweite Behauptung. □

Satz 1.6.5. *Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Es gelten für nicht ganzzahliges $x \in \mathbb{R}$ die Darstellungen*

$$D_N(x) \;=\; \frac{e((N+\frac{1}{2})x) - e(-(N+\frac{1}{2})x)}{e(\frac{1}{2}x) - e(-\frac{1}{2}x)}$$

und

$$F_N(x) \;=\; \frac{1}{2N+1}\cdot\left(\frac{e((N+\frac{1}{2})x) - e(-(N+\frac{1}{2})x)}{e(\frac{1}{2}x) - e(-\frac{1}{2}x)}\right)^2 \;=\; \sum_{n=-N}^{N}\frac{N-|n|}{N+\frac{1}{2}}e(nx)\,.$$

Zudem gilt

$$\int_0^1 F_N(x)dx \;=\; 1 \;\; \textit{und} \;\; \lim_{N\to\infty}\int_{\substack{-\frac{1}{2}\\ |x|\geq\delta}}^{\frac{1}{2}} F_N(x)dx \;=\; 0\,.$$

für alle $\delta > 0$

Beweis. Einsetzen der Formel für die endliche geometrische Reihe ergibt

$$D_N(x) \;=\; e(-Nx)\sum_{n=0}^{2N} e(nx) \;=\; e(-Nx)\frac{e((2N+1)x)-1}{e(x)-1} \;=\; \frac{e((N+\frac{1}{2})x) - e(-(N+\frac{1}{2})x)}{e(\frac{1}{2}x) - e(-\frac{1}{2}x)}\,.$$

Die Darstellung für den Fejérkern ergibt sich durch eine analoge Rechnung. Die Voraussetzung $x \notin \mathbb{Z}$ ist notwendig, da sonst die Nenner $e(\frac{1}{2}x) - (-\frac{1}{2}x)$ und $e(x)-1$ verschwinden. Man sieht aber, dass sich alle Ausdrücke auf $\mathbb{Z}$ fortsetzen lassen. Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 F_N(x)dx \;&=\; \int_0^1\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{j=-n}^{n} e(jx)\right)dx \;=\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left(\sum_{\substack{j=-n\\ j\neq 0}}^{n}\int_0^1 e(jx)dx + \int_0^1 1dx\right)\\ &=\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left(\sum_{\substack{j=-n\\ j\neq 0}}^{n}\left[\frac{e(jx)}{2\pi ij}\right]_0^1 + 1\right) \;\underset{e(j)=1}{=}\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} 1 \;=\; 1\,.\end{aligned}$$

Für $x \in [\delta, \frac{1}{2}]$ gilt nach der Euler-Identität $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ und der Monotonie des Sinus auf $[0, \frac{1}{2}\pi]$ die Abschätzung

$$|F_N(x)| \;=\; \frac{1}{2N+1} \cdot \left| \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \right|^2 \;\leq\; \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2} \,.$$

Daraus folgt für jedes feste $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ der Übergang

$$\int\limits_{\delta}^{\frac{1}{2}} F_N(x) \;\leq\; \frac{\frac{1}{2} - \delta}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2} \;\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \,.$$

Diese Konvergenz gilt auf $(-\frac{1}{2}, -\delta)$ analog, woraus die letzte Behauptung des Satzes folgt. □

Satz 1.6.6. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig-differenzierbar mit Periode 1, dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} S_f(x, N) \;=\; f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Behauptung gilt auch schon, wenn f nur einmal stetig-differenzierbar ist, erfordert aber zu ihrem Beweis größeren Aufwand.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$ schnell gegen Null streben: zweimalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) \;&=\; \int\limits_0^1 f(t)e(-nt)dt \;=\; \underbrace{\left[f(t)\frac{e(-nt)}{-2\pi i n} \right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{2\pi i n}\int\limits_0^1 f'(t)e(-nt)dt \\ &=\; -\frac{1}{4\pi^2 n^2}\int\limits_0^1 f''(t)e(-nt)dt \;=\; O\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty) \,. \end{aligned}$$

Damit konvergieren die Partialsummen gleichmäßig

$$S_f(x, N) \;=\; \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e(nx) \;\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\; g(x) \tag{1}$$

gegen eine Grenzfunktion $g(x)$, und es bleibt $f(x) = g(x)$ zu zeigen. Aus (1) folgt, dass auch die Folge der arithmetischen Mittel der $S_f(x, N)$ gegen $g(x)$ konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|n|\leq N} S_f(x, n) \;=\; g(x) \,. \tag{2}$$

Nach den Sätzen 1.6.4 und 1.6.5 folgt für festes $\delta > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|n|\leq N} S_f(x, n) \;=\; \lim_{N\to\infty} \int\limits_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)F_N(x-t)dt \;=\; \lim_{N\to\infty} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)F_N(x-t)dt \,. \tag{3}$$

Wegen der Stetigkeit von f für $t = x$ können wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so bestimmen, dass $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ist für $|x - t| < \delta$. Mit (2) und (3) folgt

$$|g(x) - f(x)| \;\leq\; \varepsilon \cdot \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} F_N(x-t)dt \;\leq\; \varepsilon$$

und folglich $g(x) = f(x)$ überall. □

Definition 1.6.7. Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt \;<\; \infty\,.$$

Dann nennt man

$$\hat{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;\;,\;\; \hat{f}(u) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-ut)dt$$

die <u>Fouriertransformierte</u> von f.

Satz 1.6.8 (Poissonsche Summenformel). *Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig-differenzierbar und mit einer Konstanten $C > 0$ gelte*

$$|f(x)| \;+\; |f'(x)| \;+\; |f''(x)| \;\leq\; C \cdot \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{1}$$

Dann ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\,.$$

Beweis. Die Funktion

$$F(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

besitzt offenbar die Periode 1. Wegen der Bedingung (1) konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x+k)$$

gleichmäßig für $m = 0, 1, 2$. Also ist $F(x)$ zweimal stetig-differenzierbar. Nach Satz 1.6.6 konvergiert die Fourierreihe $S_F(x, N)$ gleichmäßig gegen $F(x)$, also

$$\begin{aligned}
F(x) \;&=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n)e(nx) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 F(t)e(-nt)dt\right) e(nx) \\
&=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(t+k)e(-n(t+k))dt\right) e(nx) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(t)e(-nt)dt\right) e(nx) \\
&=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-nt)dt\right) e(nx) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(nx)\,.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir $x = 0$ einsetzen. □

1.7 Die Gamma-Funktion

Definition 1.7.1. Die <u>Gamma-Funktion</u> Γ ist definiert über

$$\Gamma(z) \;=\; \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

mit $t^{z-1} = \exp((z-1)\log(t))$.

Satz 1.7.2. *Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ ist für $\mathrm{Re}(z) > 0$ holomorph, und auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar. Sie besitzt Pole genau in den Stellen $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Es sind Pole erster Ordnung, das Residuum in $-n$ ist $\frac{(-1)^n}{n!}$. $\Gamma(z)$ genügt der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, und es ist $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Die Folge

$$I_n \;=\; \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1} e^{-t} dt$$

ist für $\mathrm{Re}(z) > 0$ kompakt konvergent und besitzt daher eine holomorphe Grenzfunktion $\Gamma(z)$. Durch partielle Integration erhalten wir für $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) \;=\; \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \;=\; \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty \;+\; z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \;=\; z \cdot \Gamma(z)$$

und damit durch Induktion

$$\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdots (z+n)}\,. \tag{1}$$

Die rechte Seite ist nun meromorph für $\mathrm{Re}(z) > -(n+1)$ und ist dort holomorph bis auf die Nullstellen $\{0, -1, -2, \ldots\}$ des Nenners, die Pole erster Ordnung konstituieren. Da n beliebig gewählt werden kann, ergibt sich die meromorphe Fortsetzbarkeit in die gesamte komplexe Ebene. Es ist

$$\Gamma(1) \;=\; \int_0^\infty e^{-t} dt \;=\; 1$$

woraus mit (1) die Darstellung $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Das Residuum des Pols in $z = -n$ ergibt sich aus (1) zu

$$\operatorname*{Res}_{z=-n}(\Gamma) \;=\; \lim_{z \to -n} \left((z+n) \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \right) \;=\; \frac{(-1)^n}{n!}\,.$$

□

Satz 1.7.3. *Für $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ gilt*

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,.$$

Beweis. Für $\mathrm{Re}(z) > 0$ haben wir

$$|\Gamma(z)| \;\le\; \int_0^\infty |t^{z-1}| e^{-t} dt \;=\; \int_0^\infty t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t} dt \;=\; \Gamma(\mathrm{Re}(z))\,.$$

Daher ist $\Gamma(z)$ in jedem Vertikalstreifen $\{z \,:\, \delta \le \mathrm{Re}(z) \le b\}$ mit $0 < \delta < b$ beschränkt. Aus der Rekursion

$$\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

folgt dann, dass $\Gamma(z)$ auch auf jeder Menge der Gestalt

$$\{z \;:\; a < \mathrm{Re}(z) \le b\,,\; |\mathrm{Im}(z)| \ge 1\} \tag{$*$}$$

beschränkt ist. Wir betrachten nun die Funktion

$$f(z) \;=\; \Gamma(z)\Gamma(1-z) \;-\; \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

im Vertikalstreifen $V = \{z \;:\; 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 2\}$. In der Menge $V_1 = V \cap \{\mathrm{Im}(z) \ge 1\}$ der Gestalt $(*)$ ist $f(z)$ beschränkt. Die Funktionen $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ und $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ haben in den Stellen $z = 0, 1, 2$ Pole erster Ordnung mit denselben Residuen. Damit ist f im Vertikalstreifen V holomorph. f ist sogar in V beschränkt, da $V - V_1$ kompakt ist. Da f die Periode 2 besitzt ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph aber auch beschränkt, und daher nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen $f(-z) = -f(z)$ bleibt nur $f(z) = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 1.7.4. *Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ hat keine Nullstellen, d. h. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ist eine ganze Funktion.*

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 1.7.2 und 1.7.3. □

1.8 Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion

Mittels der Funktionalgleichung kann die Riemannsche Zeta-Funktion, die wir bereits in die Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ meromorph fortgesetzt haben, in die gesamte komplexe Ebene meromorph fortgesetzt werden. In dieser Funktionalgleichung tritt auch die Gamma-Funktion auf.

Definition 1.8.1. Die <u>Theta-Reihe</u> und die <u>Psi-Reihe</u> $\vartheta, \psi :\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \quad , \quad \psi(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \;=\; \frac{1}{2}(\vartheta(x) - 1)\,.$$

Lemma 1.8.2. *Die Reihen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ sind zweimal stetig-differenzierbar in $(0,\infty)$. Die unendliche Reihe $\psi(x)$ konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von $(0,\infty)$.*

Beweis. Es sei $M > 1$ beliebig. Auf $[M^{-1}, M]$ haben die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \ \text{ bzw. } \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi e^{-n^2\pi x} \ \text{ bzw. } \ \sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^2 e^{-n^2\pi x}$$

die konvergenten Majoranten

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi M^{-1}} \ \text{ bzw. } \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi e^{-n^2\pi M^{-1}} \ \text{ bzw. } \ \sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^2 e^{-n^2\pi M^{-1}}\,.$$

Daraus folgt, dass die beiden ersten Ableitungen durch gliedweises Ableiten erhalten werden können sowie die Stetigkeit der beiden ersten Ableitungen. Entsprechendes gilt für $\vartheta(x) = 2\psi(x) + 1$. □

Lemma 1.8.3. *Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ erfüllen für $x > 0$ die Funktionalgleichungen*

$$\vartheta(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \vartheta\left(\tfrac{1}{x}\right) \tag{1}$$

$$2\psi(x) + 1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(2\psi\left(\tfrac{1}{x}\right) + 1\right) \tag{2}$$

sowie die Abschätzungen

$$\psi(x) \;=\; O\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x \to 0+) \tag{3}$$

$$\psi(x) \;=\; O\left(e^{-\pi x}\right) \quad (x \to \infty)\,. \tag{4}$$

Beweis. Es genügt (1) zu zeigen, denn (2) folgt aus (1), (4) folgt aus der Reihendarstellung von $\psi(x)$, und (3) folgt aus (2) und (4). Wir wenden dazu auf $\vartheta(x)$ die Poissonsche Summenformel 1.6.8 an: es ist

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \ \text{ mit } \ f(t) \;=\; e^{-t^2\pi x}\,.$$

Die Bedingung (1) von Satz 1.6.8

$$|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)| \;\le\; C \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

ist offenbar erfüllt. Zur Berechnung der Fouriertransformierten $\hat{f}$ verwenden wir die bekannte Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} .$$

Die Substitution $t \mapsto t \cdot \sqrt{\pi x}$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 \pi x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

Verschiebung des Integrationswegs $(-\infty, \infty)$ auf $(-\infty + iy, \infty + iy)$ für festes $y \in \mathbb{R}$ mittels des Cauchyschen Integralsatzes ergibt

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} e^{-t^2 \pi x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2\pi x)\exp(-2\pi i u t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi x(t + \tfrac{iu}{x})^2 - \pi \tfrac{u^2}{x}\right) dt \\ &= \int_{-\infty+\frac{iu}{x}}^{\infty+\frac{iu}{x}} \exp\left(-t^2\pi x\right) dt \cdot \exp(-\pi \tfrac{u^2}{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \exp\left(-\pi \tfrac{u^2}{x}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \vartheta\left(\tfrac{1}{x}\right) .$$

□

Lemma 1.8.4. *Für $\sigma > 1$ gilt*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx .$$

Beweis. Es sei $M > 1$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\psi(x)$ auf $[M^{-1}, M]$ haben wir

$$\int_{M^{-1}}^{M} \psi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M^{-1}}^{M} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx . \tag{1}$$

Aus den Schranken $\psi(x) = O(\frac{1}{\sqrt{x}})$ für $x \to 0+$ bzw. $\psi(x) = O(e^{-\pi x})$ für $x \to \infty$ (Lemma 1.8.3) folgt für die Summanden

$$\lim_{M\to\infty} \int_{M^{-1}}^{M} x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx . \tag{2}$$

Wir führen den Grenzübergang auf der rechten Seite von (1) im Integral aus: Es sei $\delta = \delta(\sigma) > 0$ so gewählt, dass $\frac{1}{2}\sigma(2 - \delta) > 1$ ist (das ist möglich, da $\sigma > 1$ ist), und schätzen

$$\int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx$$

ab. Für $n \leq M^{\frac{1}{2-\delta}}$ erhalten wir

$$\int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx = O_\sigma\left(M^{-\frac{1}{2}\sigma}\right)$$

und damit

$$\sum_{n \le M^{\frac{1}{2-\delta}}} \left| \int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2 \pi x} dx \right| = O_\sigma \left(M^{\frac{1}{2-\delta} - \frac{1}{2}\sigma} \right) , \tag{3}$$

die Summe geht also gegen Null für $M \to \infty$, da $\frac{1}{2-\delta} - \frac{1}{2}\sigma < 0$ ist. Für $n > M^{\frac{1}{2-\delta}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| &\le \left| \int_0^{n^{-(2-\delta)}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| + \left| \int_{n^{-(2-\delta)}}^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| \\ &= O_\sigma \left(n^{-\frac{1}{2}\sigma(2-\delta)} \right) + O_\sigma \left(\exp(-n^\delta) M^{-\frac{1}{2}\sigma} \right) \end{aligned}$$

durch Abschätzung der Faktoren der Integranden. Es folgt

$$\sum_{m > M^{\frac{1}{2-\delta}}} \left| \int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| \underset{M \to \infty}{\longrightarrow} 0 , \tag{4}$$

weiter strebt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_M^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| = O_\sigma \left(M^{\frac{1}{2}\sigma} e^{-\pi M} \right) \tag{5}$$

gegen Null für $M \to \infty$. Aus (3), (4) und (5) folgt

$$\lim_{M \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M^{-1}}^{M} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx$$

$$\underset{t=n^2\pi x}{=} \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \right) \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}s-1} dt = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) .$$

Damit und (1), (2) folgt die Behauptung. □

Satz 1.8.5 (Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion). *Die Riemannsche Zeta-Funktion besitzt eine Fortsetzung in die ganze komplexe Ebene mit einem Pol erster Ordnung und Residuum Eins in* $s = 1$. *Die* <u>*vollständige Zeta-Funktion*</u>

$$\xi(s) = \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \zeta(s)$$

erfüllt die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$. $\zeta(s)$ *besitzt keine Nullstellen für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *und besitzt für* $\mathrm{Re}(s) < 0$ *genau die Nullstellen* $-2, -4, -6, \ldots$. *Für die Nullstellen im* <u>*kritischen Streifen*</u> $\{0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1\}$ *gilt* $\zeta(s) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1-s) = 0$.

Beweis. Nach den Lemmata 1.8.3 und 1.8.4 gilt für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}} \psi\left(\tfrac{1}{x}\right) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1} \right) \psi(x) dx . \end{aligned}$$

Wegen $\psi(x) = O(e^{-\pi x})$ nach Lemma 1.8.3 ist die Folge

$$I(N,s) = \int_1^N \left(x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1}\right)\psi(x)dx$$

kompakt konvergent in $\mathbb{C}$, und

$$I(s) = \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1}\right)\psi(x)dx$$

stellt eine ganze Funktion dar. Die Funktion $\xi(s)$ ist damit holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ und erfüllt offenbar die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$. Damit gilt auch $\xi(s) = 0 \Leftrightarrow \xi(1-s) = 0$. Da $\xi(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$ ist folgt $\xi(s) \neq 0$ für $\sigma < 0$. Wegen $\Gamma(\frac{s}{2}) \neq 0$ auf $\mathbb{C}$ (Satz 1.7.4) besitzt $\zeta(s)$ Nullstellen in den Polstellen von $\Gamma(\frac{s}{2})$ mit Ausnahme von $s = 0$, nach Satz 1.7.2 also in $-2, -4, -6, \ldots$ wie behauptet. $\square$

1.9 Die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe

Entscheidend für den funktionentheoretischen Beweis des Primzahlsatzes ist die Möglichkeit, die Koeffizientensummen von Dirichletreihen durch Kurvenintegrale auszudrücken, die wir hier behandeln wollen.

Satz 1.9.1. *Es sei*

$$D(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Mit einer für $x \geq x_0$ monoton wachsenden und positiven Funktion $\Phi(x)$ und einer Konstanten $C > 0$ sei $|a_n| < C \cdot \Phi(x)$ für alle $n \leq x$. Es sei

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| n^{-\sigma} = O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right) \quad (\sigma \to 1+)$$

für ein festes $\alpha > 0$ sowie $c > 1$, $x > 1$, $x \notin \mathbb{Z}$ sowie $T > 0$, dann gilt

$$\sum_{n\leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} D(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^c}{T\cdot(\sigma-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x\cdot\Phi(2x)\cdot\log(2x)}{T}\right) + O\left(\frac{x\cdot\Phi(2x)}{T\cdot\|x\|}\right)$$

für $T \to \infty$, wobei $\|x\|$ den Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl bedeute.

Zur Vorbereitung beweisen wir

Lemma 1.9.2. *Es sei $c > 0$, $T > 0$ und $y > 0$, dann ist für $T \to \infty$*

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right) & \text{falls } y > 1 \\ O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right) & \text{falls } 0 < y < 1 \end{cases}.$$

Beweis. Es sei $y > 1$. Für $U > 0$ ist nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-U-iT}^{c-iT}\frac{y^s}{s}ds + \int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}ds + \int_{c+iT}^{-U+iT}\frac{y^s}{s}ds + \int_{-U+iT}^{-U-iT}\frac{y^s}{s}ds\right) = \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\tfrac{y^s}{s}\right) = 1$$

wenn im positiven Sinn über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\left|\int_{c+iT}^{-U+iT}\frac{y^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{c} y^\sigma d\sigma = O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)$$

und analog

$$\left|\int\limits_{-U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \;=\; O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\,.$$

$$\left|\int\limits_{-U-iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \;=\; O\left(\frac{Ty^{-U}}{|\log(y)|}\right) \underset{U\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds \;=\; 1 + O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\,.$$

Es sei $0 < y < 1$: Für $U > 0$ ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} ds + \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds + \int\limits_{c+iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s} ds + \int\limits_{U+iT}^{U-iT} \frac{y^s}{s} ds\right) \;=\; 0\,,$$

wobei wiederum über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\left|\int\limits_{c+iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \;\le\; \frac{1}{T}\int\limits_{c}^{\infty} y^\sigma d\sigma \;=\; O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\;,\; \left|\int\limits_{U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \;=\; O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right) \text{ sowie}$$

$$\left|\int\limits_{U-iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \;=\; O\left(\frac{T\cdot y^U}{|\log(y)|}\right) \underset{U\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

woraus die Behauptung des Lemmas folgt. □

Beweis von Satz 1.9.1. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

auf $[c - iT, c + iT]$ erhalten wir mit Lemma 1.9.2

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} D(s)\frac{x^s}{s} ds \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} \left(\tfrac{x}{n}\right)^s ds\right) \;=\; \sum_{n<x} a_n \;+\; O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\right)\,. \tag{1}$$

Wir spalten die Summe

$$\Sigma_0 \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c\cdot\log|(\frac{x}{n})|}$$

auf in

$$\Sigma_0 \;=\; \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

mit

$$\Sigma_1 \;=\; \sum_{n<\frac{x}{2}} \frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\;,\; \Sigma_2 \;=\; \sum_{n>2x} \frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\;,\; \Sigma_3 \;=\; \sum_{\frac{x}{2}\le n\le 2x} \frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\,.$$

Für $n < \frac{x}{2}$ und $n > 2x$ ist $|\log(\frac{x}{n})| \ge \log(2)$, also

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \;=\; O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c}\right) \;=\; O\left((c-1)^{-\alpha}\right) \tag{2}$$

nach Voraussetzung. Wir kommen zum schwierigsten Teil, der Abschätzung von Σ_3. Es sei N eine natürliche Zahl, die x am nächsten liegt. Für $N < n \le 2x$ sei $r = n - N$. Wir haben wegen $x \le N + \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\log\left(\tfrac{n}{x}\right) \;\ge\; \log\left(\frac{N+r}{N+\frac{1}{2}}\right) \;=\; \log\left(1 + \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right) .$$

Im Folgenden seien $c_0, c_1 > 0$ feste Konstanten. Aus dem Mittelwertsatz schließen wir, dass $\log(1+u) \ge c_0 u$ für $0 \le u \le 1$ ist, und erhalten

$$\log\left(1 + \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right) \;\ge\; c_0 \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}} \;\ge\; c_1 \cdot \frac{r}{x} .$$

Also haben wir

$$\sum_{N<n\le 2x} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} \;=\; O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \sum_{1\le r\le 2x} \frac{1}{r}\right) \;=\; O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right) . \tag{3}$$

Analog folgt

$$\sum_{\frac{x}{2}\le n<N} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} \;=\; O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right) . \tag{4}$$

Für $n = N$ erhalten wir

$$\frac{|a_n|}{N^c \cdot |\log(\frac{x}{N})|} \;=\; O\left(\frac{\Phi(N)}{N^c \cdot |\log(1 + \frac{x-N}{N})|}\right) \;=\; O\left(\frac{\Phi(2x) \cdot x^{1-c}}{\|x\|}\right) . \tag{5}$$

Aus den Abschätzungen (1)-(5) folgt die Behauptung des Satzes. □

1.10 Der Primzahlsatz

Die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) \;=\; \sum_{p\le x} 1$$

ist eng mit der Koeffizientensumme von $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, der negativen logarithmischen Ableitung der Riemannschen Zeta-Funktion, verknüpft.

Definition 1.10.1. Die Funktion

$$\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;,\; \Lambda(n) \;=\; \begin{cases} \log(p) & \text{falls} \quad n = p^m \text{ für eine Primzahl } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Mangoldtsche Funktion. Die summatorischen Funktionen

$$\psi(x) \;=\; \sum_{n\le x} \Lambda(n) \;\text{ bzw. }\; \vartheta(x) \;=\; \sum_{p\le x} \log(p)$$

heißen Tschebyscheffsche ψ-Funktion bzw. Tschebyscheffsche ϑ-Funktion.

Lemma 1.10.2. *Es gilt die Asymptotik*

$$\psi(x) - \vartheta(x) \;=\; O\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \log(x)^2\right) \;\; (x \to \infty) .$$

Beweis. Es gilt

$$\psi(x) - \vartheta(x) \;=\; \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p^m\le x} \log(p) \;\le\; \left(x^{\frac{1}{2}} + \cdots + x^{\frac{1}{k_0}}\right) \cdot \log(x) ,$$

wobei k_0 so gewählt ist, dass $\frac{3}{2} < x^{\frac{1}{k_0}} \leq 2$ ist (es ist $k_0 = O(\log(x))$ für $x \to \infty$). Also folgt

$$\psi(x) - \vartheta(x) \;=\; O\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \log(x)^2\right) .$$

□

Satz 1.10.3. *Für $\sigma > 1$ gilt*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} .$$

Beweis. Wir betrachten das Eulerprodukt

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

zunächst für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$. Logarithmieren ergibt

$$\log(\zeta(s)) \;=\; -\sum_p \log(1-p^{-s})$$

und Differentiation dann

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_p \frac{\log(p)}{1-p^{-s}} p^{-s} \;=\; \sum_p \left(\sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms} \right) \log(p) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} .$$

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt, dass dies für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt. □

Satz 1.10.4. *Der Primzahlsatz*

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)} \;+\; o\left(\frac{x}{\log(x)}\right) \quad (x \to \infty) \tag{PZ0a}$$

ist jeweils äquivalent zu den Behauptungen

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; o\,(x) \quad (x \to \infty) \tag{PZ0b}$$

$$\vartheta(x) \;=\; x \;+\; o\,(x) \quad (x \to \infty) \tag{PZ0c}$$

für die Tschebyscheffschen Funktionen.

Beweis. Die Behauptungen (PZ0c) und (PZ0b) sind äquivalent nach Lemma 1.10.2, wir zeigen noch die Äquivalenz von (PZ0a) mit (PZ0c):

<u>(PZ0a)⇒(PZ0c):</u>
Mit abelscher partieller Summation (Satz 1.3.1) ist

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{p \leq x} \log(p) \;=\; \pi(x)\log(x) - \int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt .$$

Es ist

$$\int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt \;\leq\; \int_{\frac{3}{2}}^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi(t)}{t} dt \;+\; O\left(\int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt \right) \;=\; O\left(\frac{x}{\log(x)}\right) .$$

Also folgt $\vartheta(x) = x + o(x)$ aus (PZ0a).

(PZ0c)⇒(PZ0a):
Wiederum mit abelscher partieller Summation gilt

$$\pi(x) \;=\; \sum_{p\le x}\frac{\log(p)}{\log(p)} \;=\; \frac{\vartheta(x)}{\log(x)}+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{\vartheta(t)}{t\cdot\log(t)^2}dt \;=\; \frac{\vartheta(x)}{\log(x)}+O\left(\int\limits_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{dt}{\log(t)^2}\right).$$

Dabei ist

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{dt}{\log(t)^2} \;=\; \int\limits_{\frac{3}{2}}^{x^{\frac{1}{2}}}\frac{dt}{\log(t)^2}+\int\limits_{x^{\frac{1}{2}}}^{x}\frac{dt}{\log(t)^2} \;=\; O\left(\frac{x}{\log(x)^2}\right).$$

□

Zum Beweis des Primzahlsatzes genügt es also, $\psi(x)=x+o(x)$ nachzuweisen. Dazu wenden wir den Satz 1.9.1 über die Koeffizientensumme auf die Dirichletreihe

$$D(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s}$$

an, deren Koeffizientensumme gerade $\psi(x)$ ist. Wir werden tatsächlich (PZ0b) mit einem schärferen Restglied beweisen, was auch ein schärferes Restglied im Primzahlsatz (PZ0a) zur Folge hat. Dabei muss allerdings die einfache Näherungsfunktion $\frac{x}{\log(x)}$ durch den Integrallogarithmus

$$\mathrm{li}(x) \;=\; \int\limits_{2}^{x}\frac{dt}{\log(t)}$$

ersetzt werden.

Lemma 1.10.5. *Es sei $x=m+\frac{1}{2}$ für $m\in\mathbb{N}$ und $c=c(x)=1+\frac{1}{\log(x)}$, dann ist*

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \;+\; O\left(\frac{x\cdot\log(x)^2}{T}\right).$$

Beweis. Wir wenden Satz 1.9.1 mit $a_n=\Lambda(n)$ auf

$$D(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s}$$

an mit Koeffizientenbeschränkung $\Phi(x)=\log(x)$. Da $D(s)$ einen Pol erster Ordnung in $s=1$ besitzt, folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma} \;=\; O\left((\sigma-1)^{-1}\right) \quad (\sigma\to 1+).$$

Es kann also $\alpha=1$ im Satz 1.9.1 gewählt werden. Die drei Restglieder des Satzes sind alle durch

$$O\left(\frac{x\cdot\log(x)^2}{T}\right)$$

beschränkt. □

Wir werden im Folgenden den Integrationsweg $[c-iT,c+iT]$ zu einer geschlossenen Kurve ergänzen, die ein Rechteck R im positiven Sinne berandet, und zwar zur Kurve

$$\gamma \;=\; [c-iT,c+iT]\,\cup\,[c+iT,a+iT]\,\cup\,[a+iT,a-iT]\,\cup\,[a-iT,c-iT]$$

für $a < 1 < c$. Die einzige Singularität des Integranden $-\frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \frac{x^s}{s}$ im Innern des Rechtecks R soll der Pol in $s = 1$ sein. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds$$

wird dann durch den Residuensatz ausgewertet. Dazu muss sichergestellt werden, dass $\zeta(s)$ im Innern von R keine Nullstellen besitzt, d. h. zum Beweis des Primzahlsatzes benötigt man die Existenz einer nullstellenfreien Zone. Diese wollen wir im Folgenden diskutieren. Wir wissen nach Satz 1.5.2, dass $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$ ist. Entscheidend für den Beweis des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée-Poussin im Jahre 1896 war die Tatsache, dass $\zeta(s)$ auch auf der Geraden $\sigma = 1$ keine Nullstellen besitzt. Diese Tatsache reicht für den Beweis des Primzahlsatzes aus, liefert jedoch nur die Asymptotik. Der Beweis für $\zeta(1 + it) \neq 0$ beinhaltet jedoch auch die Grundidee für den Beweis des Primzahlsatzes, daher wollen wir damit beginnen:

Satz 1.10.6 (Hadamard und de la Vallée-Pussin). *Für $t \neq 0$ ist $\zeta(1 + it) \neq 0$.*

Beweis. Wir verwenden die Ungleichung

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \ \geq \ 0 \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})\,. \tag{1}$$

Angenommen $\zeta(s)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ in $s = 1 + i\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle der Ordnung $m_2 \geq 0$ in $s = 1 + 2i\gamma$. Für $\sigma > 1$ sei

$$\varphi(s) \ = \ 3\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + 4\frac{\zeta'(s + i\gamma)}{\zeta(s + i\gamma)} + \frac{\zeta'(s + 2i\gamma)}{\zeta(s + 2i\gamma)}\,.$$

Diese Funktion besitzt in $s = 1$ die Laurententwicklung

$$\varphi(s) \ = \ -\frac{3}{s-1} + \frac{4m_1}{s-1} + \frac{m_2}{s-1} + h(s)$$

mit einer in $s = 1$ holomorphen Funktion $h(s)$. Es folgt

$$\lim_{\sigma \to 1+} (\mathrm{Re}(\varphi(\sigma))) \ = \ \infty\,. \tag{2}$$

Andererseits ist nach Satz 1.10.3

$$\varphi(\sigma) \ = \ -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \left(3 + 4n^{-i\gamma} + n^{-2i\gamma}\right)\,,$$

also wegen (1)

$$\mathrm{Re}(\varphi(\sigma)) \ = \ -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \left(3 + 4\cos(\gamma \log(n)) + \cos(2\gamma \log(n))\right) \ \leq \ 0$$

im Widerspruch zu (2). □

Es ist nun möglich, die Nullstellenfreiheit auch für ein Gebiet links von der Geraden $\sigma = 1$ zu beweisen. Wir stellen zunächst einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie bereit.

Satz 1.10.7 (Borel-Carathéodory). *Die Funktion f sei holomorph auf einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s| \leq R$ enthält. Es sei $f(0) = 0$ und $\mathrm{Re}(f(s)) \leq M$ für alle $|s| \leq R$. Für $|s| \leq r < R$ gilt dann*

$$|f(s)| \ \leq \ \frac{2Mr}{R - r}\ , \ \ |f'(s)| \ \leq \ \frac{2MR}{(R - r)^2}\,.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \ \leq \ \frac{2M}{R^k} \ \ (\forall k \geq 1)\,. \tag{1}$$

Die Substitution $s = R \cdot e(\theta)$ ergibt mittels der Cauchyschen Integralformel

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))d\theta \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s)\frac{ds}{s} \;=\; f(0) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

Für $k > 0$ haben wir

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))e(k\theta)d\theta \;=\; \frac{R^{-k}}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s)s^{k-1}ds \;=\; 0 \tag{3}$$

und

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))e(-k\theta)d\theta \;=\; \frac{R^k}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s)s^{-k-1}ds \;=\; \frac{R^k f^{(k)}(0)}{k!}\,. \tag{4}$$

Indem wir eine Linearkombination von (2),(3) und (4) bilden, erhalten wir für beliebige $\phi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))(1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))d\theta \;=\; \frac{R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{2k!}$$

und

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\frac{1}{2}R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{k!}\right) \;\le\; M\int_0^1 (1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))d\theta \;=\; M \tag{5}$$

für alle $k > 0$. Wir wählen ϕ so, dass $e(-\phi)f^{(k)}(0) = |f^{(k)}(0)|$ ist. Die Gleichung (1) folgt dann aus (5). Aus (1) folgt weiter

$$|f(s)| \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| r^k \;\le\; 2M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{r}{R}\right)^k \;=\; \frac{2Mr}{R-r}$$

sowie

$$|f'(s)| \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|kr^{k-1}}{k!} \;\le\; \frac{2M}{R} \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{r}{R}\right)^{k-1} \;=\; \frac{2MR}{(R-r)^2}\,.$$

□

Lemma 1.10.8. *Es sei f holomorph in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s - s_0| \le r$ umfasst. Es sei $M > 1$ so gewählt, dass*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \;<\; e^M$$

auf der Kreisscheibe $|s - s_0| \le r$ gilt. Dann ist mit einer absoluten Konstante $A > 0$

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho}\right| \;<\; \frac{A \cdot M}{r} \quad \textit{für } |s - s_0| \;\le\; \tfrac{1}{4}r\,,$$

wobei ϱ alle Nullstellen von f mit $|\varrho - s_0| \le \frac{1}{2}r$ entsprechend ihrer Vielfachheit durchläuft.

Beweis. Die Funktion

$$g(s) \;=\; f(s) \cdot \prod_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho}$$

ist für $|s - s_0| \le r$ holomorph und auf der kleineren Kreisscheibe $|s - s_0| \le \frac{1}{2}r$ von Null verschieden. Auf dem Rand $|s - s_0| = r$ gilt $|s - \varrho| \ge \frac{1}{2}r \ge |s_0 - \varrho|$, und damit

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right| \;=\; \left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \cdot \left|\prod_{\varrho} \frac{s_0 - \varrho}{s - \varrho}\right| \;\le\; \left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \;<\; e^M$$

nach Voraussetzung. Nach dem Maximumsprinzip gilt diese Ungleichung dann auch auf der Kreisscheibe $|s - s_0| \leq r$. Wir setzen

$$h(s) \; = \; \mathrm{Log}\left(\frac{g(s)}{g(s_0)}\right) \,,$$

wobei Log die holomorphe Funktion sei, die aus $\log : \; (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch analytische Fortsetzung hervorgeht. Dann ist $h(s)$ holomorph für $|s - s_0| \leq \frac{1}{2}r$. Zudem ist $h(s_0) = 0$ und $\mathrm{Re}(h(s)) = M$. Nach Satz 1.10.7 ist

$$|h'(s)| \; \leq \; \frac{2M \cdot \frac{1}{2}r}{(\frac{1}{2}r - \frac{1}{4}r)^2} \; \leq \; \frac{A \cdot M}{r}$$

für $|s - s_0| \leq \frac{1}{4}r$, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 1.10.9. *Die Funktion f sei holomorph in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s - s_0| < r$ umfasst. Es sei*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \; < \; e^M$$

mit $M > 1$ für $|s - s_0| < r$, und f habe keine Nullstellen im Halbkreis $\{|s - s_0| \leq r \mid \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)\}$. Dann gilt

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) \; < \; \frac{A \cdot M}{r} \,. \tag{1}$$

Hat f eine Nullstelle ϱ_0 auf der Strecke zwischen $s_0 - \frac{1}{2}r$ und s_0, so gilt

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) \; < \; \frac{A \cdot M}{r} - \frac{1}{s_0 - \varrho_0} \,. \tag{2}$$

Dabei ist A eine absolute Konstante.

Beweis. Nach Lemma 1.10.8 gilt

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) \; < \; \frac{A \cdot M}{r} - \sum_{|\varrho - s_0| \leq \frac{1}{2}r} \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{s_0 - \varrho}\right) \,.$$

Aus $\mathrm{Re}(\frac{1}{s_0 - \varrho}) \geq 0$ für alle ϱ in der Summe folgt die Behauptung. □

Lemma 1.10.10. *Es sei $m \in \mathbb{Z}$ und $\delta > 0$. Für $\sigma = -m + \delta$ und $|s - 1| \geq 1$ ist*

$$\zeta(s) \; = \; O_{m,\delta}\left(t^{m+1}\right)$$

für $|t| \to \infty$.

Beweis. Mit der allgemeinen Eulerschen Summenformel (Übungsaufgabe 5) besitzt $\zeta(s)$ für $\sigma > 1$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2}$ und $g(u) = u^{-s}$, $g^{(k)}(u) = (-1)^k s(s+1)\cdots(s+k-1)u^{-(s+k)}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\int_{1-\varepsilon}^{x} g(u)du + \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}(g^{(k)}(x)P_k(x) - g^{(k)}(1-\varepsilon)P_k(1-\varepsilon)) + (-1)^m\int_{1-\varepsilon}^{x} g^{(m+1)}(u)P_m(u)du\right)\\
&\underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - P_0(x)x^{-s} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}s(s+1)\cdots(s+k-1)(x^{-(s+k)}P_k(x) - P_k(1))\right)\\
&\qquad\qquad +(-1)^m s(s+1)\cdots(s+m)\int_1^\infty u^{-(s+m+1)}P_m(u)du\\
&= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k P_k(1)s(s+1)\cdots(s+k-1) \; + \; (-1)^m\int_1^\infty u^{-(s+m+1)}P_m(u)du \,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Da das Integral

$$\int_1^\infty u^{-(s+m+1)} P_m(u)du$$

für $\sigma > -m$ konvergiert, gilt die Darstellung (1) für $\sigma > -m$. Nun ist

$$\int_1^\infty u^{-(s+m+1)} P_m(u)du \;=\; O(1) \quad , \quad s(s+1)\cdots(s+k-1) \;=\; O_m(|t|^k) \;\; (|t| \to \infty)$$

für $1 \leq k \leq m+1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 1.10.11. Es sei $T > 0$. Mit $N(T)$ bezeichnen wir die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ mit $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ und $0 < \mathrm{Im}(s) < T$.

Lemma 1.10.12. *Es ist $N(T+1) - N(T) = O(\log(T))$ für $T \to \infty$. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geq -m$ und $t > 0$ und $\zeta(s) \neq 0$ gilt*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{|\mathrm{Im}(\varrho)-t| \leq 1} \frac{1}{s-\varrho} \;+\; O_m(\log(t)) \;\; (t \to \infty)\,.$$

Beweis. Wir wenden Lemma 1.10.8 an mit

$$f(s) \;=\; \zeta(s) \;\; , \;\; s_0 \;=\; 2+it \;\; , \; r \;=\; 4(m+3)\,.$$

Es ist

$$|\zeta(s_0)| \;=\; \prod_p \frac{1}{|1-p^{-s_0}|} \;\geq\; \prod_p \frac{1}{1+p^{-2}}\,.$$

Nach Lemma 1.10.10 sind die Voraussetzungen von Lemma 1.10.8 erfüllt mit $M = 4(m+4)\log(t)$, falls $t \geq t_0$ genügend groß ist. Lemma 1.10.8 ergibt für $|s-s_0| \leq m+3$ dann

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_\varrho \frac{1}{s-\varrho} \right| \;=\; O_m(\log(t))\,, \tag{1}$$

wobei ϱ alle Nullstellen von $\zeta(s)$ mit $|\varrho - s_0| \leq 2(m+3)$ entsprechend ihrer Vielfachheit durchläuft. Wir wenden (1) zunächst mit $s = s_0$ und $m = 2$ an: wegen $\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} = O(1)$ für $t \to \infty$ erhalten wir

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{|\varrho - s_0| \leq 10} \frac{1}{s_0 - \varrho} \right) \;=\; O(\log(t))\,. \tag{2}$$

Für $\varrho = \beta + i\gamma$ ist

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_0-\varrho}\right) \;=\; \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{s}_0 - \bar{\varrho}}{|s_0-\varrho|^2}\right) \;=\; \frac{2-\beta}{|s_0-\varrho|^2}\,.$$

Es ist $2 - \beta \geq 1$ und $|s_0 - \varrho|^2 \leq 100$, also

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_0-\varrho}\right) \;\geq\; \frac{1}{100}\,.$$

Mit (2) folgt

$$N(t+1) \;-\; N(t) \;=\; O(\log(t))\,. \tag{3}$$

Aus (1) folgt schließlich für $|s - s_0| \leq m$ die Abschätzung

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{|\varrho - s_0| \leq 1} \frac{1}{s-\varrho} \right| \;=\; O_m(\log(t)) + O_m\left(\sum_{1 \leq |\varrho - s_0| \leq 2(m+3)} \frac{1}{s-\varrho} \right) \;=\; O_m(\log(t))$$

wegen (3). □

Wir formulieren nun einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Größenordnung der Riemannschen Zeta-Funktion in der Nähe von $\sigma = 1$, sowie der Weite der nullstellenfreie Zone von $\zeta(s)$:

Satz 1.10.13 (Nullstellenfreie Zone der Zeta-Funktion, allgemeines Ergebnis). *Es gibt eine absolute Konstante $A_1 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Es sei $\zeta(s) \ll e^{\Phi(t)}$ für $t \to \infty$ in dem Gebiet $1-\theta(t) \le \sigma \le 2$, $t \ge 1$, wobei $\Phi(t)$ und $\frac{1}{\theta(t)}$ positiv und monoton wachsend in t seien, sowie*

$$\theta(t) \le 1 \ , \ \Phi(t) \to \infty \ , \ \frac{\Phi(t)}{\theta(t)} e^{-\Phi(t)} \to 0$$

für $t \to \infty$. Es gelte zudem

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t+1)}{\theta(t)} \ = \ \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t+1)}{\Phi(t)} \ = \ 1\,.$$

Dann hat $\zeta(s)$ keine Nullstellen im Gebiet

$$\sigma \ \ge \ 1 - 2A_1 \cdot \frac{\theta(2t+1)}{\Phi(2t+1)}\,. \tag{NZ1}$$

Zudem gilt

$$\sigma \ \ge \ 1 - A_1 \cdot \frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)} \ \Rightarrow \ \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ = \ O\left(\frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)} \cdot \log(t)\right)\,. \tag{NZ2}$$

Beweis. Es sei $\beta+i\gamma$ eine Nullstelle von $\zeta(s)$ in der oberen Halbebene. Die Konstanten $A_k > 0$ für $k \ge 2$ werden im Folgenden absolut sein. Es sei σ_0 beliebig mit

$$1 + e^{-\Phi(2\gamma+1)} \ \le \ \sigma_0 \ \le 2 \tag{1}$$

sowie

$$s_0 \ = \ \sigma_0 + i\gamma \ , \ s_0' \ = \ \sigma_0 + 2i\gamma \tag{2}$$

und

$$r \ = \ \theta(2\gamma+1)\,. \tag{3}$$

Da $\theta(t)$ monoton fallend ist, liegen die Kreisscheiben $|s-s_0| \le r$ und $|s-s_0'| \le r$ im Bereich $\{\sigma+it \mid \sigma \ge 1-\theta(t)\}$. Wegen $|\zeta(s_0)|^{-1} < \exp(A\Phi(2\gamma+1))$ bzw. $|\zeta(s_0')|^{-1} < \exp(A\Phi(2\gamma+1))$ für genügend großes A existiert eine Konstante A_2, so dass

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| \ < \ e^{A_2\Phi(2\gamma+1)} \ \text{ bzw. } \ \left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0')}\right| \ < \ e^{A_2\Phi(2\gamma+1)} \tag{4}$$

gilt auf den Kreisscheiben $|s-s_0| \le r$ bzw. $|s-s_0'| \le r$. Wir wenden jetzt Lemma 1.10.9 an mit $M = A_2\Phi(2\gamma+1)$ und erhalten

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma_0+2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0+2i\gamma)}\right) \ < \ A_3\frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\,. \tag{5}$$

Wir behandeln zunächst

<u>Fall I: $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{2}r$</u>

Wir erhalten wegen 1.10.9(2) in diesem Fall

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma_0+i\gamma)}{\zeta(\sigma_0+i\gamma)}\right) \ < \ A_3\frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{1}{\sigma_0-\beta}\,. \tag{6}$$

Es ist

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \ < \ \frac{a}{\sigma_0-1} \tag{7}$$

mit $a = a(\sigma_0) \to 1$ für $\sigma_0 \to 1$. Wie im Beweis für $\zeta(1+it) \neq 0$ (Satz 1.10.6) verwenden wir nun die Ungleichung

$$-3\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} - 4\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma_0+i\gamma)}{\zeta(\sigma_0+i\gamma)}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma_0+2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0+2i\gamma)}\right) \ \ge \ 0 \tag{8}$$

für $\sigma > 1$. Wir wenden (8) an mit $\sigma = \sigma_0$ und erhalten mit (5), (6) und (7) dann

$$\frac{3a}{\sigma_0 - 1} + \frac{5A_3\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} \;\geq\; 0\,,$$

also

$$\sigma_0 - \beta \;\geq\; \left(\frac{3a}{4(\sigma_0-1)} + \frac{5A_3}{4} \cdot \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1}\,,$$

und somit

$$1-\beta \;\geq\; \left(\frac{3a}{4(\sigma_0-1)} + \frac{5A_3}{4} \cdot \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1} - (\sigma_0 - 1) \;=\; \frac{1 - \frac{3}{4}a - \frac{5}{4}A_3 \cdot \frac{\Phi(2\gamma+1)\cdot(\sigma_0-1)}{\theta(2\gamma+1)}}{\frac{3a}{4(\sigma_0-1)} + \frac{5}{4}A_3 \cdot \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}}\,. \tag{9}$$

Für hinreichend große γ können wir wegen (1)

$$\sigma_0 - 1 \;=\; \frac{1}{40A_3} \cdot \frac{\theta(2\gamma+1)}{\Phi(2\gamma+1)} \tag{10}$$

und wegen (7) $a = \frac{5}{4}$ wählen. Wir erhalten aus (9)

$$1 - \beta \;\geq\; A_1 \frac{\theta(2\gamma+1)}{\Phi(2\gamma+1)}\,,\ \text{also (NZ1)}\,.$$

Fall II:
Es gelte

$$\beta \;\leq\; \sigma_0 - \frac{1}{2}r \;=\; 1 + \frac{1}{40A_3} \cdot \frac{\theta(2\gamma+1)}{\Phi(2\gamma+1)} - \frac{1}{2}\theta(2\gamma+1)\,. \tag{11}$$

Daraus folgt ebenso die Behauptung (NZ1). Für

$$\sigma \;\geq\; 1 - A_1 \frac{\theta(2t)}{\Phi(2t)}$$

folgt wegen (NZ1) die Abschätzung

$$|s - \varrho|^{-1} \;\gg\; \frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)}$$

für alle Nullstellen ϱ von $\zeta(s)$ mit $|\mathrm{Im}(\varrho) - t| \leq 1$. Die Behauptung (NZ2) folgt mit Lemma 1.10.12. □

Wir benutzen nun das - relativ einfache - Ergebnis von Lemma 1.10.10 über die Größenordnung von $\zeta(s)$ um daraus ein - ebenfalls einfaches - Resultat über die nullstellenfreie Zone von $\zeta(s)$ (Satz 1.10.14) zu erhalten, um daraus eine erste einfache Version des Primzahlsatzes mit Restglied zu folgern. Wir werden dann im Folgenden durch die Verwendung von Weylschen Exponentialsummen die Ergebnisse von Lemma 1.10.10 über die Größenordnung von $\zeta(s)$ wiederholt verbessern. Dies wird dann auch zu Verbesserungen in den Folgerungen führen: wir erhalten eine größere nullstellenfreie Zone als in Satz 1.10.13 und ein besseres Restglied im Primzahlsatz (vgl. Sätze 2.8.6, 2.8.7 sowie 3.6.6, 3.6.7).

Satz 1.10.14 (Nullstellenfreie Zone, 1. Version). *Es gibt eine absolute Konstante $A_0 > 0$, so dass $\zeta(s) \neq 0$ für $t \geq 0$ und $\sigma \geq 1 - \frac{2A_0}{\log(t)}$ ist. Für $\sigma \geq 1 - \frac{A_0}{\log(t)}$ gilt*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; O\left(\log(t)^2\right)\,.$$

Beweis. Wir wenden Satz 1.10.13 an mit $\theta = \frac{1}{2}$. Nach Lemma 1.10.10 ist die Voraussetzung von Satz 1.10.13 $\zeta(s) \ll e^{\Phi(t)}$ für $t \to \infty$ im Streifen $1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2$ erfüllt mit $\Phi(t) = C \cdot \log(t)$ für ein festes $C > 0$. □

Definition 1.10.15. Der Integrallogarithmus $\mathrm{li}(x)$ ist für $x \geq 2$ definiert durch

$$\mathrm{li}(x) \;=\; \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} \,.$$

Satz 1.10.16 (Primzahlsatz mit Restglied, 1. Version). *Es gibt Konstanten $c_0, c_1 > 0$, so dass gilt:*

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; O\left(x \cdot \exp(-c_0 \log(x)^{\frac{1}{2}})\right) \,, \tag{PZ1a}$$

$$\pi(x) \;=\; \mathrm{li}(x) \;+\; O\left(x \cdot \exp(-c_1 \log(x)^{\frac{1}{2}})\right) \,. \tag{PZ1b}$$

Beweis. Es sei zunächst $T = T(x) > 1$, $c = c(x) = 1 + \log(x)^{-1}$, $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$. T wird später so gewählt, dass wir das optimale Ergebnis erhalten. Nach Lemma 1.10.5 ist

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;+\; O\left(\frac{x \cdot \log(x)^2}{T}\right) \,. \tag{1}$$

Wir ergänzen den Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} \;=\; [c - iT, c + iT] \;\cup\; [c + iT, a + iT] \;\cup\; [a + iT, a - iT] \;\cup\; [a - iT, c - iT]$$

mit $a = 1 - \frac{A_0}{\log(T)}$, wobei A_0 die Konstante aus Satz 1.10.14 ist. Es ist nach dem Residuensatz und Satz 1.10.14

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; \operatorname*{Res}_{s=1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}\right) \;=\; x \,, \tag{2}$$

$$\int_{c+iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T}\right) \,, \tag{3}$$

$$\int_{a-iT}^{c-iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T}\right) \,, \tag{4}$$

sowie

$$\int_{a-iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(x \cdot \exp\left(-A_0 \frac{\log(x)}{\log(T)}\right) \cdot \log(T)^3\right) \,. \tag{5}$$

Die Restglieder in (3) und (4) sind monoton fallend in $T = T(x)$, während das Restglied in (5) in T monoton wächst. Das optimale Resultat wird erreicht, wenn T so gewählt wird, dass beide etwa gleich groß sind, d. h. wenn

$$\frac{x}{T} \;=\; x \cdot \exp\left(-\frac{\log(x)}{\log(T)}\right)$$

gilt (die anderen Terme ignorieren wir), also für

$$\log(T) \;=\; (\log(x))^{\frac{1}{2}} \,. \tag{6}$$

Aus (1)-(6) folgt

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; O\left(x \cdot \exp\left(-c_0 (\log(x)^{\frac{1}{2}})\right)\right) \,. \tag{7}$$

Man sieht leicht, dass die Bedingung $x = m + \frac{1}{2}$ entfallen kann. Die Behauptung (PZ1b) folgt aus (PZ1a) mittels partieller Summation (wobei die Konstante c_0 leicht abgeändert wird). $\square$

1.11 Primzahlverteilung und Nullstellen, Riemannsche Vermutung

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Qualität des Restglieds im Primzahlsatz wesentlich von der Existenz einer nullstellenfreien Zone für die Riemannsche Zeta-Funktion abhängt. Wir werden nun Ausdrücke für $\psi(x)$ betrachten, in denen die Nullstellen der Zeta-Funktion direkt auftreten.

Satz 1.11.1. *Es sei $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$. $\varrho = \beta + i\gamma$ bedeute eine Nullstelle von $\zeta(s)$ mit $\beta = \mathrm{Re}(\varrho) \in (0,1)$ und $\gamma = \mathrm{Im}(\varrho)$. Dann gilt für $x \geq 1$ und $1 \leq T \leq x$*

$$\psi(x) \;=\; x - \sum_{|\gamma|\leq T} \frac{x^\varrho}{\varrho} \;+\; O\left(\frac{x\cdot\log(x)^2}{T}\right). \tag{1}$$

Beweis. Wir verwenden die Darstellung von $\psi(x)$ als komplexes Kurvenintegral (Lemma 1.10.5):

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \;+\; O\left(\frac{x\cdot\log(x)^2}{T}\right) \tag{2}$$

mit $c = c(x) = 1 + \log(x)^{-1}$. Den vertikalen Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ ergänzen wir dieses Mal zu einem Rechteck, das die Nullstellen von $\zeta(s)$ umfasst. Nach Lemma 1.10.12 gilt für die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta+i\gamma$ mit $|\gamma-T| \leq \frac{1}{2}$: $N(T+\frac{1}{2})-N(T-\frac{1}{2}) = O(\log(T))$. Es gibt eine feste Konstante $c_0 > 0$ und ein $T' \in [T-\frac{1}{2}, T+\frac{1}{2}]$, so dass

$$|\gamma - T'| \;\geq\; c_0\log(T')^{-1} \tag{3'}$$

für alle Nullstellen $\varrho = \beta+i\gamma$ von $\zeta(s)$ gilt. Ersetzen wir in (1) die Summe $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ über die Nullstellen mit $|\gamma| \leq T$ durch die Summe

$$\sum_{|\gamma|\leq T'} \frac{x^\varrho}{\varrho},$$

so ist der Unterschied beschränkt durch

$$\left|\sum_{|\gamma|\leq T} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \sum_{|\gamma|\leq T'} \frac{x^\varrho}{\varrho}\right| \;=\; O\left(\frac{x\cdot\log(T')}{T'}\right).$$

Es genügt daher, (1) für T' anstelle von T zu zeigen. Wir schreiben im Folgenden wieder T statt T' und setzen anstelle von (3') nun

$$|\gamma - T| \;\geq\; c_0\log(T)^{-1} \tag{3}$$

voraus für alle Nullstellen $\varrho = \beta+i\gamma$ von $\zeta(s)$. Wir ergänzen den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} \;=\; [c-iT, c+iT] \,\cup\, [c+iT, -\tfrac{1}{2}+iT] \,\cup\, [-\tfrac{1}{2}+iT, -\tfrac{1}{2}-iT] \,\cup\, [-\tfrac{1}{2}-iT, c-iT].$$

Für $s \in [c+iT, -\frac{1}{2}+iT]$ haben wir nach Lemma 1.10.12 und wegen (3) die Abschätzung

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{|\beta-T|<1} \frac{1}{s-\varrho} + O(\log(T)) \;=\; O\left((N(T+1)-N(T-1))\log(T)\right) + O(\log(T)) \;=\; O\left(\log(T)^2\right)$$

und damit

$$\int_{c+iT}^{-\frac{1}{2}+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \;=\; O\left(\frac{x\cdot\log(T)^2}{T}\right) \tag{4}$$

und ebenso

$$\int_{-\frac{1}{2}-iT}^{c-iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \;=\; O\left(\frac{x\cdot\log(T)^2}{T}\right). \tag{5}$$

Für $s = -\frac{1}{2} + it$ mit $t \in [-T, T]$ ist nach Lemma 1.10.12

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{|\mathrm{Im}(\varrho)-t|<1} \frac{1}{s-\varrho} \;=\; O(\log|t|)$$

und damit

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-iT}^{-\frac{1}{2}+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \;=\; O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log(T)^2\right). \tag{6}$$

Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \;=\; \operatorname*{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right) \;+\; \sum_{|\gamma|\leq T}\operatorname*{Res}_{s=\varrho}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right) \;=\; x - \sum_{|\gamma|\leq T}\frac{x^\varrho}{\varrho} \tag{7}$$

und die Behauptung folgt aus (2)-(7). □

Zwischen dem Restglied im Primzahlsatz und der horizontalen Verteilung der Nullstellen von $\zeta(s)$ besteht eine enge Beziehung, insbesondere auch zur Riemannschen Vermutung:

Vermutung 1.11.2 (Riemannsche Vermutung). *Alle Nullstellen von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ liegen auf der kritischen Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.*

Satz 1.11.3. *Es seien*

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \inf\left\{\alpha \;:\; \forall\varepsilon>0:\; \psi(x) = x + O_\varepsilon\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right)\right\}\\
\theta_2 &= \inf\left\{\alpha \;:\; \forall\varepsilon>0:\; \pi(x) = \mathrm{li}(x) + O_\varepsilon\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right)\right\}\\
\theta_3 &= \sup\left\{\beta \;:\; \exists\varrho = \beta + i\gamma:\; \zeta(s) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, insbesondere ist die Riemannsche Vermutung jeweils äquivalent zu

$$\forall\varepsilon>0:\; \psi(x) \;=\; x + O_\varepsilon\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad \textit{bzw.} \quad \forall\varepsilon>0:\; \pi(x) \;=\; \mathrm{li}(x) + O_\varepsilon\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Bemerkung 1.11.4. Man kann zeigen, dass im kritischen Streifen unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen. Nach deren Imaginärteil geordnet ergeben sich die ersten sechs Nullstellen als

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= \tfrac{1}{2} + 14.13i\\
\varrho_2 &= \tfrac{1}{2} + 21.02i\\
\varrho_3 &= \tfrac{1}{2} + 25.01i\\
\varrho_4 &= \tfrac{1}{2} + 30.42i\\
\varrho_5 &= \tfrac{1}{2} + 32.94i\\
\varrho_6 &= \tfrac{1}{2} + 37.59i
\end{aligned}$$

X. Gourdon und P. Demicki haben 2004 rechnerisch bestätigt, dass $\mathrm{Re}(\varrho_n) = \frac{1}{2}$ ist für $n \leq 10^{13}$.

Beweis von Satz 1.11.3. Die Identität $\theta_1 = \theta_2$ folgt durch partielle Summation, wir verzichten auf die Rechnung. Es genügt daher, $\theta_1 = \theta_3$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst

$\theta_1 \leq \theta_3$:
Dazu wenden wir Satz 1.11.1 an mit $T = x$. Wir erhalten, falls $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist:

$$\psi(x) \;=\; x - \sum_{|\gamma|\leq x}\frac{x^\varrho}{\varrho} \;+\; O\left(\log(x)^2\right). \tag{1}$$

Es ist $|x^\varrho| \leq x^{\theta_3}$ und

$$\left| \sum_{|\gamma|\leq x} \frac{|x^\varrho|}{|\varrho|} \right| \leq 2x^{\theta_3} \cdot \left(\sum_{1\leq\gamma\leq x} \frac{1}{\gamma} + O(1) \right) . \tag{2}$$

Wir wählen J so, dass $2^J \leq x < 2^{J+1}$ ist und erhalten

$$\sum_{1\leq\gamma\leq x} \frac{1}{\gamma} \leq \sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \sum_{2^j\leq\gamma\leq 2^{j+1}} 1 = \sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \left(N(2^{j+1}) - N(2^j) \right) .$$

Nach Lemma 1.10.12 ist $N(2^{j+1}) - N(2^j) = O(j2^j)$, also

$$\sum_{1\leq\gamma\leq x} \frac{1}{\gamma} = O\left(J^2\right) = O\left(\log(x)^2\right) . \tag{3}$$

Mit (1), (2) und (3) folgt

$$\psi(x) = x + O_\varepsilon\left(x^{\theta_3+\varepsilon}\right)$$

für alle $\varepsilon > 0$, also $\theta_1 \leq \theta_3$.

<u>$\theta_3 \leq \theta_1$:</u>
Es sei

$$\psi(x) = x + O_\varepsilon\left(x^{\theta_1+\varepsilon}\right) \quad , \quad \forall\varepsilon > 0 . \tag{4}$$

Für $\sigma \geq 1$ setzen wir

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \quad , \quad G(s) = \int_1^\infty (\psi(x) - x)x^{-s-1}dx .$$

Partielle Summation ergibt für $\sigma \geq 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s} = \int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx \tag{5}$$

und damit

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty (\psi(x) - x)x^{-s-1}dx = G(s) .$$

Aus der Abschätzung (4) folgt nun, dass die Folge

$$G_N(s) = \int_1^N (\psi(x) - x)x^{-s-1}dx$$

in der Ebene $\sigma > \theta_1$ kompakt gegen $G(s)$ konvergiert. Damit ist $G(s)$ holomorph für $\sigma > \theta_1$. Damit besitzt auch $F(s)$ keinen Pol für $\sigma > \theta_1$, d. h. $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \theta_1$, woraus $\theta_3 \leq \theta_1$ folgt. □

Kapitel 2

Weylsche Exponentialsummen

2.1 Einleitung

Definition 2.1.1. Eine Weylsche Exponentialsumme oder trigonometrische Summe ist eine Summe der Form

$$\Sigma \;=\; \sum_{a<n\leq b} e(f(n))\,,$$

wobei $f:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ für $a<b$ eine stetig-differenzierbare Funktion ist. Unter der trivialen Abschätzung von Σ verstehen wir die Abschätzung

$$\left|\sum_{a<n\leq b} e(f(n))\right| \;\leq\; \sum_{a<n\leq b} |e(f(n))| \;=\; \lfloor b\rfloor - \lfloor a\rfloor\,.$$

Unser Ziel ist es, nichttriviale Abschätzungen zu erhalten.

Beispiel 2.1.2. Eine Summe der Form

$$\sum_{a<n\leq b} n^{-s}\;\;(s=\sigma+it)$$

die in Zusammenhang mit der Zeta-Funktion von Bedeutung ist, kann durch partielle Summation umgeschrieben werden zu

$$\sum_{a<n\leq b} n^{-s} \;=\; \sigma\int\limits_a^b\left(\sum_{a<n\leq u} n^{-it}\right)u^{-\sigma-1}du \;+\; \left(\sum_{a<n\leq b} n^{-it}\right)b^{-\sigma}\,.$$

Die Summen

$$\sum_{a<n\leq u} n^{-it} \;=\; \sum_{a<n\leq u} e\left(-\tfrac{t\cdot\log(n)}{2\pi}\right) \quad\text{und}\quad \sum_{a<n\leq b} n^{-it}$$

sind Weylsche Exponentialsummen. Nichttriviale Abschätzungen werden später bei den Abschätzungen der Größenordnung der Riemannschen Zeta-Funktion von Bedeutung sein.

2.2 Exponentialsummen in Polynomen, Weylschritte

Eine der Ideen von Weyl war es, die Funktion $f(n)$ in der Exponentialsumme durch ein Taylorpolynom genügend hoher Ordnung zu approximieren. Damit kann das Problem der Abschätzung von

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n))$$

auf den Fall zurückgeführt werden, dass $f(n)$ ein Polynom ist. Sind die Zahlen e_ν durch

$$\sum_{0<m\leq b-a} e(f(a+m)) \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu \sum_{m=1}^{b-a} m^\nu e\left(f'(a)m+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}m^k\right)$$

gegeben, und ist e_ν für $\nu \geq 1$ genügend klein, so kann die Abschätzung der Exponentialsumme mittels partieller Summation auf die Abschätzung von Summen

$$\sum_{m=1}^{\mu} e(P(m))$$

mit dem Taylorpolynom

$$P_k(m) \;=\; f'(a)m \;+\; \cdots \;+\; \frac{f^{(k)}(a)}{k!}m^k$$

zurückgeführt werden. Wir werden im Folgenden Weyls Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen der Form

$$\sum_{l=1}^{m} e(P(l))$$

mit einem Polynom P beschreiben. Die Idee ist, die Abschätzung von

$$\sum_{l=1}^{m} e(P_k(l))$$

mit einem Polynom k-ten Grades $P_k(l) = \alpha_k l^k + \alpha_{k-1} l^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ durch einen so genannten Weylschritt auf die Abschätzung von Summen der Form

$$\sum_{l=1}^{m} e(P_{k-1}(l))$$

mit einem Polynom $(k-1)$-ten Grades zurückzuführen. Nach $(k-1)$ Schritten gelangt man schließlich zu einem linearen Polynom. Die zugehörigen Exponentialsummen sind endliche geometrische Reihen, deren Wert explizit bekannt ist. Formal wird der Beweis durch Induktion nach dem Grad des Polynoms geführt. Die Qualität der Abschätzung hängt entscheidend von Diophantischen Approximationseigenschaften der Koeffizienten α_i von $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ ab.

Es gibt verschiedene Arten, die Güte einer Diophantischen Approximation einer reellen Zahl α durch eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ zu messen. Jedoch kann folgende Feststellung gemacht werden: von zwei Approximationen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ (mit p_i, q_i jeweils teilerfremd) einer Zahl α ist, falls die Differenzen $|\alpha - \frac{p_1}{q_1}|$ und $|\alpha - \frac{p_2}{q_2}|$ etwa gleich groß sind, diejenige besser, für die der Nenner q_i deutlich kleiner ist.

Beispiel 2.2.1. Es ist $\pi = 3,14159265\ldots$, aus dieser Dezimalbruchentwicklung erhält man die Approximation

$$\frac{p_1}{q_1} \;=\; \frac{3141592}{1000000}$$

mit Differenz $\left|\pi - \frac{p_1}{q_1}\right| \approx 6 \cdot 10^{-7}$. Eine wesentlich bessere (weil einfachere) Approximation ist jedoch gegeben durch

$$\frac{p_2}{q_2} \;=\; \frac{355}{113}$$

mit $|\pi - \frac{p_2}{q_2}| \approx 6 \cdot 10^{-7}$.

Die reellen Zahlen, die die besten Diophantischen Approximationen gestatten, sind die ganzen Zahlen. Eine ganze Zahl $p \in \mathbb{Z}$ besitzt die Diophantische Approximation $\frac{p}{q}$ mit $q = 1$ und $p - \frac{p}{q} = 0$, d. h. Nenner und Differenz sind kleinstmöglich. Es sind jedoch gerade Polynome $P_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_0$ mit ganzen Koeffizienten α_i, also Koeffizienten mit bestmöglichen Diophantischen Approximationseigenschaften, für die die triviale Abschätzung die richtige Größe liefert: Ist $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le k$, so ist auch $P(n) \in \mathbb{Z}$ und damit $e(P(n)) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. In der Exponentialsumme

$$\sum_{a<n\le b} e(P(n))$$

sind also die Terme $e(P(n))$ von der Gleichverteilung auf dem Einheitskreis maximal weit entfernt, und es ist

$$\sum_{a<n\le b} e(P(n)) \;=\; \sum_{a<n\le b} 1 \;=\; b-a\,.$$

Wir beginnen mit den linearen Polynomen:

Lemma 2.2.2. *Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Ist*

$$S_1 \;=\; \sum_{n=a+1}^{b} e(\lambda n + \mu)\,,$$

so gilt

$$|S_1| \;\le\; \frac{1}{|\sin(\pi\lambda)|}\,.$$

Beweis. Nach der Summenformel für die endliche geometrische Reihe ist

$$|S_1| \;=\; \left|\frac{1-e\left((b-a)\lambda\right)}{1-e(\lambda)}\right| \;\le\; \frac{2}{|e(\frac{\lambda}{2})-e(-\frac{\lambda}{2})|} \;=\; \frac{1}{|\sin(\pi\lambda)|}\,.$$

□

Bemerkung 2.2.3. Diese Abschätzung ist nur gut, d. h. wesentlich besser als die triviale Abschätzung $|S_1| \le b-a$, falls $|\sin(\pi\lambda)|$ wesentlich größer als $(b-a)^{-1}$ ist, was wegen

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda} \;=\; \pi$$

bedeutet, dass $\|\lambda\|$ wesentlich größer als $(b-a)^{-1}$ ist.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu: Durch wiederholte Anwendung von Differenzenoperatoren wird das Polynom $P(n)$ durch Polynome kleineren Grades ersetzt:

Definition 2.2.4. Die Funktion f sei auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert, und es sei $d \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\Delta_d(f)(x) \;:=\; f(x+d) - f(x)$$

für alle $x, d \in \mathbb{R}$, für welche die rechte Seite definiert ist. Für $l \ge 2$ ist der <u>iterierte Differenzenoperator</u> $\Delta_{d_l,d_{l-1},\ldots,d_1}$ rekursiv durch

$$\Delta_{d_l,d_{l-1},\ldots,d_1}(f)(x) \;=\; \Delta_{d_l}\left(\Delta_{d_{l-1},\ldots,d_1}(f)\right)(x)$$

gegeben.

Beispiel 2.2.5. Es ist

$$\begin{aligned}\Delta_{d_2,d_1}(f)(x) \;&=\; \Delta_{d_2}\left(\Delta_{d_1}(f)\right)(x) \;=\; \Delta_{d_1}(f)(x+d_2) - \Delta_{d_1}(f)(x)\\ &=\; f(x+d_2+d_1) - f(x+d_2) - f(x+d_1) + f(x)\,.\end{aligned}$$

Lemma 2.2.6. *Es seien N_1, N_2 und N natürliche Zahlen, so dass $N_1 < N_2$ und $0 \le N_2 - N_1 \le N$ ist. Es sei $f(n)$ eine reellwertige zahlentheoretische Funktion und*

$$S(f) \;=\; \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(f(n))\,.$$

Dann ist

$$|S(f)|^2 \;=\; \sum_{|d|\le N} S_d(f) \;\text{ mit }\; S_d(f) \;=\; \sum_{n\in I(d)} e\left(\Delta_d(f)(n)\right)\,,$$

wobei $I(d)$ ein Intervall von aufeinander folgenden Zahlen ist, das in $[N_1+1, N_2]$ liegt.

Beweis. Für irgend eine Zahl d sei $I(d) = [N_1 + 1 - d, N_2 - d] \cap [N_1 + 1, N_2]$. Wir erhalten

$$|S(f)|^2 \;=\; S(f) \cdot \overline{S(f)} \;=\; \left(\sum_{m=N_1+1}^{N_2} e(f(m)) \right) \cdot \left(\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(-f(n)) \right)$$

$$= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{m=N_1+1}^{N_2} e\left((f(m) - f(n)\right) \;=\; \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{d=N_1+1-n}^{N_2-n} e\left(f(n+d) - f(n)\right)$$

$$= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{d=N_1+1-n}^{N_2-n} e\left(\Delta_d(f)(n)\right) \;=\; \sum_{d=-(N_2-N_1-1)}^{N_2-N_1-1} \sum_{n \in I(d)} e\left(\Delta_d(f)(n)\right)$$

$$= \sum_{|d| \le N} \sum_{n \in I(d)} e\left(\Delta_d(f)(n)\right) \;=\; \sum_{|d| \le N} S_d(f)\,.$$

□

Lemma 2.2.7. *Es seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ und l eine ganze Zahl, so dass $l \ge 1$, $N_1 < N_2$ und $0 \le N_2 - N_1 \le N$ ist. Es sei $f(n)$ eine reellwertige zahlentheoretische Funktion und*

$$S(f) \;=\; \sum_{n=N_1+1}^{N_2+1} e(f(n))\,.$$

Dann ist

$$|S(f)|^{2^l} \;\le\; (2N+1)^{2^l - l - 1} \sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} S_{d_l,\ldots,d_1}(f)$$

mit

$$S_{d_l,\ldots,d_1}(f) \;=\; \sum_{n \in I(d_l,\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(f)(n)\right)\,,$$

wobei $I(d_l, \ldots, d_1)$ ein Intervall von aufeinander folgenden Zahlen ist, das in $[N_1 + 1, N_2]$ liegt.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach l geführt. Der Fall $l = 1$ ist gerade Lemma 2.2.6. Wir nehmen an, die Behauptung sei für $l \ge 1$ schon bewiesen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|S(f)|^{2^{l+1}} \;=\; \left(|S(f)|^{2^l}\right)^2 \;\le\; \left((2N+1)^{2^l-l-1} \sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)| \right)^2$$

$$= (2N)^{2^{l+1}-2l-2} \left(\sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)| \right)^2$$

$$\le (2N)^{2^{l+1}-2l-2} (2N+1)^l \sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)|^2$$

mit

$$S_{d_l,\ldots,d_1}(f) \;=\; \sum_{n \in I(d_l,\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(f)(n)\right)\,.$$

Nach Lemma 2.2.6 gibt es für jedes l-Tupel $(d_l, \ldots, d_1)$ ein Intervall

$$I(d_{l+1}, d_l, \ldots, d_1) \;\subseteq\; I(d_l, \ldots, d_1) \;\subseteq\; [N_1 + 1, N_2]$$

mit

$$|S_{d_l,\ldots,d_1}(f)|^2 \;=\; \left|\sum_{n\in I(d_l,\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(f)(n)\right)\right|^2 \;=\; \sum_{|d_{l+1}|\le N}\;\sum_{n\in I(d_{l+1},d_l,\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_{l+1},d_l,\ldots,d_1}(f)(n)\right)$$

$$=\; \sum_{|d_{l+1}|\le N} S_{d_{l+1},d_l,\ldots,d_1}(f)$$

und damit

$$|S(f)|^{2^{l+1}} \;\le\; (2N+1)^{2^{l+1}-(l+1)-1} \sum_{|d_1|\le N}\cdots\sum_{|d_{l+1}|\le N} S_{d_{l+1},d_l,\ldots,d_1}(f)\,.$$

Damit ist Lemma 2.2.7 bewiesen. □

Wir wollen Lemma 2.2.7 nun auf $f(x) = P_k(x)$ mit $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ anwenden.

Lemma 2.2.8. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \ge 2$, sowie $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1} \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit*

$$\Delta_{d_{k-1},d_{k-2},\ldots,d_1}(P_k)(x) \;=\; d_1\cdots d_{k-1}\,\cdot\, k!\,\cdot\,\alpha_k x \,+\, \beta\,.$$

Beweis. Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$P_k(x+d_1) \;=\; \alpha_k x^k + d_1 k\alpha_k x^{k-1} + \alpha_{k-1}x^{k-1} + Q_{k-2}(x)$$

mit einem Polynom $Q_{k-2}(x)$ vom Grad höchstens $k-2$. Also ist

$$\Delta_{d_1}(P_k)(x) \;=\; d_1 k\alpha_k x^{k-1} + R_{k-2}(x) \;\;,\;\; \deg(R_{k-2}) \le k-2\,.$$

Durch vollständige Induktion beweist man mit dieser Überlegung leicht für $l \le k$

$$\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(P_k)(x) \;=\; k(k-1)\cdots(k-l+1)\,\cdot\, d_l d_{l-1}\cdots d_1\,\cdot\,\alpha_k x^{k-l} \,+\, R_{k-l-1}\,.$$

Diese Aussage liefert für $l = k-1$ und $R_0 = \beta$ das Ergebnis. □

Satz 2.2.9. *Es sei $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $k \ge 2$ und $K = 2^{k-1}$. Es sei $S = \sum e(P_k(n))$, wobei n über ein Intervall von höchstens N aufeinanderfolgenden Zahlen läuft. Dann gilt*

$$|S|^K \;\le\; 2^{3K}\cdot N^{K-1} + 2^{3K}\cdot N^{K-k}\cdot \sum_{1\le d_1,\ldots,d_{k-1}\le N} \min\left(N, |\sin(\pi\alpha_k\cdot k!\cdot d_1\cdots d_{k-1})|^{-1}\right)\,.$$

Beweis. Wir wenden Lemma 2.2.7 mit $l = k-1$ an, und erhalten mit Lemma 2.2.8

$$|S|^K \;\le\; (2N+1)^{K-k}\cdot\Sigma_0 \tag{1}$$

mit

$$\Sigma_0 \;:=\; \sum_{|d_1|\le N}\cdots\sum_{|d_{k-1}|\le N} S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(P_k)\,,$$

$$S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(P_k) \;=\; \sum_{n\in I(d_{k-1},\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}(P_k)(n)\right)\,,$$

wobei die $I(d_{k-1},\ldots,d_1)$ Intervalle von Länge höchstens N sind. Wir spalten diese Summe auf:

$$\Sigma_0 \;=\; \Sigma_1 \,+\, \Sigma_2\,. \tag{2}$$

In Σ_1 summieren wir über alle $(k-1)$-Tupel $(d_{k-1}, \ldots, d_1)$, für die alle $d_j \neq 0$ sind, in Σ_2 über die verbleibenden Tupel. Wir haben nach Lemma 2.2.8:

$$\Delta_{d_{k-1}, d_{k-2}, \ldots, d_1}(P_k)(x) \;=\; d_1 \cdots d_{k-1} \cdot k! \cdot \alpha_k x + \beta$$

und nach Lemma 2.2.2

$$|S_{d_{k-1}, \ldots, d_1}(P_k)| \;\leq\; \min\left(N, |\sin(\pi\alpha_k \cdot k! \cdot d_1 \cdots d_{k-1})|^{-1}\right)$$

In der Abbildung $\Phi : \; (d_{k-1}, \ldots, d_1) \longmapsto (|d_{k-1}|, \ldots, |d_1|)$ hat jedes Bild die 2^{k-1} paarweise verschiedenen Urbilder $(\pm|d_{k-1}|, \ldots, \pm|d_1|)$, daher gilt

$$|\Sigma_1| \;\leq\; 2^{k-1} \;\cdot \sum_{1 \leq d_1, \ldots, d_{k-1} \leq N} \min\left(N, |\sin(\pi\alpha_k \cdot k! \cdot d_1 \cdots d_{k-1})|^{-1}\right) \; . \tag{3}$$

Die Anzahl der $(d_{k-1}, \ldots, d_1)$ die mindestens eine Null enthalten, ist höchstens $(k-1) \cdot (2N+1)^{k-2}$. Daher gilt

$$|\Sigma_2| \;\leq\; (k-1) \cdot (2N+1)^{k-2} \cdot N \; .$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\begin{aligned} |S|^K \;\leq\; & (2N+1)^{K-k}(k-1)(2N+1)^{k-2}N \\ & + (2N+1)^{K-k} \cdot 2^{k-1} \;\cdot \sum_{1 \leq d_1, \ldots, d_{k-1} \leq N} \min\left(N, |\sin(\pi\alpha_k \cdot k! \cdot d_1 \cdots d_{k-1})|^{-1}\right) \; . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir noch die Ungleichung $|k-1| \leq 2^{k-1}$ benutzen. □

Satz 2.2.9 ist zentral in der Behandlung von Weylschen Exponentialsummen nach Weyl, Hardy und Littlewood. Da die Schranke entscheidend von der Diophantischen Natur des höchsten Koeffizienten α_k abhängt, kommen in den wichtigsten Anwendungen nicht ein festes Polynom, sondern - oft unendliche - Mengen von Polynomen vor. Es ist dann sicherzustellen, dass für die meisten dieser Polynome der höchste Koeffizient α_k günstige Eigenschaften hat, d. h. dass es nicht zu viele ganze Zahlen n gibt, für die $\|n\alpha_k\|$ klein ist. Eine Methode dies sicherzustellen besteht darin, eine rationale Approximation der Form

$$\left|\alpha_k - \frac{a}{q}\right| \;\leq\; \frac{1}{q^2} \tag{$*$}$$

vorauszusetzen, in welcher der Nenner q die passende Größenordnung besitzt. Die Verteilung der gebrochenen Teile $\{n\alpha_k\}$ ähnelt dann stark der Verteilung der $\{\frac{na}{q}\}$, die mit der Theorie der linearen Kongruenzen studiert werden kann. Daraus kann dann die so genannte Weylsche Ungleichung gefolgert werden.

Zunächst wollen wir uns einen Überblick über die Diophantischen Approximationen der Form $(*)$ verschaffen. Dies ist der Inhalt des Dirichletschen Approximationssatzes.

2.3 Der Dirichletsche Approximationssatz

Satz 2.3.1 (Dirichletscher Approximationssatz). *Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $a \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q \leq N$, so dass*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \;\leq\; \frac{1}{qN} \, .$$

Beweis. Jeder der gebrochenen Teile $\{0\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}$ liegt in einem der N Teilintervalle $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ für $0 \leq k \leq N-1$. Nach dem Schubfachprinzip müssen mindestens zwei von ihnen, etwa $\{m_1\alpha\}$ und $\{m_2\alpha\}$ mit $m_1 < m_2$, im selben Teilintervall liegen. Daher gilt

$$\left| \; \{m_2\alpha\} - \{m_1\alpha\} \; \right| \;\leq\; \frac{1}{N}$$

und somit
$$(m_2 - m_1) \cdot \alpha \;=\; [m_2\alpha] - [m_1\alpha] + \{m_2\alpha\} - \{m_1\alpha\}\ . \tag{1}$$

Wir setzen $q = m_2 - m_1$ und $a = [m_2\alpha] - [m_1\alpha]$. Wegen $0 \le m_i \le N$ folgt $1 \le q \le N$. Weiter folgt aus (1)
$$\alpha - \frac{[m_2\alpha] - [m_1\alpha]}{m_2 - m_1} \;=\; \frac{\{m_2\alpha\} - \{m_1\alpha\}}{m_2 - m_1}\ , \text{ also } \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \;\le\; \frac{1}{qN}\ .$$

□

Satz 2.3.2. *Ist α irrational, so gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{a}{q}$, so dass*
$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \;\le\; \frac{1}{q^2}$$
gilt.

Beweis. Wir konstruieren eine unendliche Folge von rationalen Zahlen $\left(\frac{a_i}{q_i}\right)$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $q_i \in \mathbb{N}$, so dass
$$\left|\alpha - \frac{a_i}{q_i}\right| \;\le\; \frac{1}{q_i^2} \tag{1}$$
und
$$\left|\alpha - \frac{a_{i+1}}{q_{i+1}}\right| \;<\; \left|\alpha - \frac{a_i}{q_i}\right| \quad \forall i \in \mathbb{N}\ . \tag{2}$$
Aus (2) folgt dann, dass die $\frac{a_i}{q_i}$ paarweise verschieden sind. Die Konstruktion verläuft rekursiv: wir setzen $q_1 = 1$ und $a_1 = [\alpha]$, dann ist offenbar (1) erfüllt. Es seien $\frac{a_1}{q_1}, \ldots, \frac{a_n}{q_n}$ bereits derart konstruiert, dass (1) und (2) gilt. Wir wählen $N_n \in \mathbb{N}$, so dass
$$\left|\alpha - \frac{a_n}{q_n}\right| \;>\; \frac{1}{N_n}\ . \tag{3}$$
Nach Satz 2.3.1 gibt es eine rationale Zahl $\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}$ mit $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$, $q_{n+1} \in \mathbb{N}$ und $1 \le q_{n+1} \le N_n$, so dass
$$\left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \;\le\; \frac{1}{q_{n+1} \cdot N_n}\ , \tag{4}$$
also insbesondere
$$\left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \;\le\; \frac{1}{q_{n+1}^2}\ .$$
Aus (3) und (4) folgt überdies
$$\left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \;<\; \left|\alpha - \frac{a_n}{q_n}\right|\ .$$

□

2.4 Die Teilerfunktion

Wir wollen zunächst die Summe aus Satz 2.2.9
$$\sum_{1 \le d_1, \ldots, d_{k-1} \le N} \min\left(N, |\sin(\pi\alpha_k \cdot k! \cdot d_1 \cdots d_{k-1})|^{-1}\right)$$
durch eine einfachere Summe von der Form
$$\sum_{n \le M} \min\left(N, \|\alpha_k \cdot n\|^{-1}\right)$$
ersetzen. Dies geschieht dadurch, dass alle $(k-1)$-Tupel $(d_1, \ldots, d_{k-1})$, für die das Produkt $d_1 \cdots d_{k-1}$ einen festen Wert n annimmt, zusammengefasst werden. Es geht also zunächst darum, die Anzahl der Darstellungen der Form $d_1 \cdots d_{k-1} = n$ für $1 \le d_i \le N$, d. h. die Teilerfunktion abzuschätzen:

Definition 2.4.1. Die Teilerfunktion $\tau(n)$ ist definiert als die Anzahl der positiven Teiler von n:

$$\tau(n) = \left|\left\{ (d_1, d_2) \mid d_1 d_2 = n \, , \, d_1, d_2 \in \mathbb{N} \right\}\right| .$$

Die verallgemeinerte Teilerfunktion definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\tau_k(n) = \left|\left\{ (d_1, \ldots, d_k) \mid d_1 \cdots d_k = n \, , \, d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N} \right\}\right| .$$

Es ist also $\tau(n) = \tau_2(n)$. In diesem Abschnitt sei die Primfaktorzerlegung von n stets $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Der Wert $\tau_k(n)$ hängt dann nur von den Exponenten α_i ab.

Lemma 2.4.2. *Die Funktion $\tau_k(n)$ ist multiplikativ. Für Primzahlpotenzen gilt*

$$\tau_k(p^\alpha) = \binom{\alpha + k - 1}{k - 1} .$$

Beweis. Jeder Zerlegung $n = d_1 \cdots d_k$ entspricht das r-Tupel von Zerlegungen

$$p_j^{\alpha_j} = \mathrm{ggT}(d_1, p_j^{\alpha_j}) \cdot \cdots \cdot \mathrm{ggT}(d_k, p_j^{\alpha_j}) \ , \ 1 \leq j \leq r .$$

Die Zuordnung ist bijektiv, daher gilt mit

$$\tau_k(n) = \tau_k(p_1^{\alpha_1}) \cdot \cdots \cdot \tau_k(p_r^{\alpha_r})$$

die Multiplikativität. Der Wert $\tau_k(p^\alpha)$ ist gleich der Anzahl der Produktzerlegungen

$$p^\alpha = p^{\alpha_1} \cdots p^{\alpha_k} \ , \ \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \alpha ,$$

d. h. gleicht der Anzahl der Darstellungen von α als Summe von k nichtnegativen Summanden. Die Folgen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Folgen $(\beta_1, \ldots, \beta_{k-1})$ mit

$$1 \leq \beta_1 < \cdots < \beta_{k-1} \leq \alpha + k - 1 ,$$

wobei die Bijektion durch

$$\beta_j = (\alpha_1 + 1) + \cdots + (\alpha_j + 1)$$

gegeben ist. Deren Anzahl ist gerade $\binom{\alpha+k-1}{k-1}$. □

Lemma 2.4.3. *Es sei $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\tau_k(n) = O_{k,\varepsilon}(n^\varepsilon)$.*

Bemerkung 2.4.4. Wir machen durch die Indizes k, ε deutlich, dass die im O-Symbol implizit vorhandene Konstante auch von k und ε abhängen darf. Der O-Ausdruck ist stets für $n \to \infty$ zu lesen. Bei komplizierten Ausdrücken benutzen wir anstelle des O-Symbols auch das Symbol $\ll$ bzw. $\ll_{k,\varepsilon}$.

Beweis von Lemma 2.4.3. Wir beweisen die Behauptung zunächst für $k = 2$: nach Lemma 2.4.2 ist $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$, deshalb ist

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \frac{\alpha_1 + 1}{p_1^{\varepsilon\alpha_1}} \cdots \frac{\alpha_r + 1}{p_r^{\varepsilon\alpha_r}} .$$

Für $p_s \leq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ haben wir

$$\frac{\alpha_s + 1}{p_s^{\alpha_s}} \leq \frac{\alpha_s + 1}{2^{\varepsilon\alpha_s}} \leq \frac{\alpha_s + 1}{\varepsilon\alpha_s \log(2)} \leq \frac{2}{\varepsilon \log(2)} ,$$

daher ist

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon \log(2)}\right)^{2^{\frac{1}{\varepsilon}}} .$$

Damit ist der Fall $k = 2$ bewiesen. Für den allgemeinen Fall führen wir eine Induktion nach k: aus der Darstellung $n = (d_1 \cdots d_{k-1}) \cdot d_k$ ergibt sich die Rekursion

$$\tau_k(n) = \sum_{d_k | n} \tau_{k-1}\left(\tfrac{n}{d_k}\right) \leq \sum_{d_k | n} \tau_{k-1}(n) = \tau(n)\tau_{k-1}(n) .$$

□

2.5 Die Weylsche Ungleichung

Lemma 2.5.1. *Es sei $k \geq 1$, $K = 2^{k-1}$ und $\varepsilon > 0$. Es sei $P_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

$$S = \sum_{n=1}^{N} e\left(P_k(n)\right) ,$$

dann gilt

$$|S|^K \ll_{k,\varepsilon} N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\left(N, \|m\alpha_k\|^{-1}\right) .$$

Beweis. Wir verwenden die Abschätzung

$$\left|\sin\left(\pi\alpha_k k! d_1 \cdots d_{k-1}\right)\right|^{-1} = O\left(\|\alpha_k k! d_1 \cdots d_{k-1}\|^{-1}\right)$$

und sammeln für $1 \leq n \leq k!N^k$ alle $(k-1)$-Tupel $(d_1, \ldots, d_{k-1})$, für die $k!d_1 \cdots d_{k-1} = n$ ist. Nach Lemma 2.4.3 gibt es $O_{k,\varepsilon}(N^\varepsilon)$ solche $(k-1)$-Tupel, daraus folgt die Behauptung. □

Wir gehen nun daran, die Summe in Lemma 2.5.1 abzuschätzen:

Lemma 2.5.2. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ und $(a,q) = 1$, sowie*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2} .$$

Dann gilt für $U, n \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\sum_{1 \leq k \leq U} \min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \ll \left(q + U + n + \frac{Un}{q}\right) \cdot (1 + \log(q)) .$$

Beweis. Es sei $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$ mit $|\theta| \leq 1$. Wir unterteilen das Intervall $[1, U]$ in höchstens $(\frac{U}{q} + 1)$ Teilintervalle $I_l := [U_l, U_{l+1}]$ der Länge $\leq q$. Für ein festes l schätzen wir die Teilsumme

$$\Sigma_l := \sum_{k \in I_l} \min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right)$$

ab. Zunächst schätzen wir für ein festes Paar (l, r) die Anzahl der $k \in I_l$ mit $\{k\alpha\} \in J_r := \left[\frac{r-1}{q}, \frac{r}{q}\right]$, $1 \leq r \leq q$ ab. Dazu seien $\{k_1\alpha\}, \{k_2\alpha\} \in J_r$ mit $k_1, k_2 \in I_l$. Es folgt

$$\left|\left\{\frac{k_2 a}{q}\right\} - \left\{\frac{k_1 a}{q}\right\}\right| \leq \left|\{k_2\alpha\} - \{k_1\alpha\}\right| + |k_2 - k_1| \cdot \frac{1}{q^2} \leq \frac{2}{q} .$$

Es gibt also höchstens 5 Werte k mit $\{k\alpha\} \in J_r$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist daher

$$\left|\left\{k \in I_l \mid \|k\alpha\| \leq \frac{m}{q}\right\}\right| \leq 10m . \tag{1}$$

Wir zerlegen

$$\Sigma_l := \sum_{k \in I_l} \min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) = \Sigma_{l,1} + \Sigma_{l,2} , \tag{2}$$

wobei in $\Sigma_{l,1}$ über alle $k \in I_l$ mit $\min(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}) = n$ summiert wird, und in $\Sigma_{l,2}$ über alle $k \in I_l$ mit $\min(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}) = \frac{1}{\|\alpha k\|}$. Es gilt

$$\min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) = n \Leftrightarrow \|\alpha k\| \leq \frac{1}{n} = \frac{q}{n} \cdot q^{-1} .$$

Die Anzahl dieser Terme ist $\ll \frac{q}{n}+1$ nach (1). Damit ist

$$\Sigma_{l,1} \ll q+n\,. \tag{3}$$

Für $0 \le s \le \frac{\log(q)}{\log(2)}$ gibt es $\ll 2^s$ Werte $k \in I_l$ mit $\|k\alpha\| \le 2^s q^{-1}$ wegen (1). Der Beitrag zur Summe $\Sigma_{l,2}$ ist $\ll \frac{2^s}{2^s q^{-1}} = q$. Summation über $0 \le s \le \frac{\log(q)}{\log(2)}$ ergibt

$$\Sigma_{l,2} \ll q\cdot(\log(q)+1)\,. \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) erhalten wir

$$\Sigma_l \ll (q+n)\cdot(\log(q)+1)\,.$$

Summation über l ergibt

$$\sum_{1\le k\le U} \min\left(n, \frac{1}{\|k\alpha\|}\right) \ll (q+n)\cdot\left(\frac{U}{q}+1\right)\cdot(\log(q)+1) = \left(q+U+n+\frac{Un}{q}\right)\cdot(1+\log(q))\,,$$

und damit die Behauptung von Lemma 2.5.2. □

Satz 2.5.3 (Weylsche Ungleichung). *Es sei $P_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $k \ge 1$, sowie*

$$S = \sum_{n=1}^{N} e\left(P_k(n)\right) \quad , \quad \left|\alpha_k - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}\,.$$

Es sei $K = 2^{k-1}$ und $\varepsilon > 0$, dann ist

$$S \underset{k,\varepsilon}{\ll} N^{1+\varepsilon}\cdot\left(N^{-1}+q^{-1}+N^{-k}q\right)^{\frac{1}{K}}\,.$$

Beweis. Da $|S| \le N$ ist folgt das Ergebnis sofort, falls $q \ge N^k$ ist. Wir können daher $1 \le q \le N^k$ annehmen, und damit $\log(q) \ll \log(N) \ll N^k$. Nach Lemma 2.5.1 ist

$$|S|^K \underset{k,\varepsilon}{\ll} N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon}\sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\left(N, \|m\alpha_k\|^{-1}\right)\,.$$

Nach Lemma 2.5.2 ist

$$\sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\left(N, \|m\alpha_k\|^{-1}\right) \ll \left(q + k!N^{k-1} + N + \frac{k!N^k}{q}\right)\cdot(1+\log(q))$$

$$\underset{k,\varepsilon}{\ll} \left(q+N^{k-1}+\frac{N^k}{q}\right)\cdot\log(N) \underset{k,\varepsilon}{\ll} N^k\cdot\left(qN^{-k}+N^{-1}+q^{-1}\right)\cdot N^{\varepsilon}\,.$$

Daher ist

$$|S|^K \underset{k,\varepsilon}{\ll} N^{K-1} + N^{K+\varepsilon}\cdot\left(qN^{-k}+N^{-1}+q^{-1}\right) \ll N^{K+\varepsilon}\cdot\left(qN^{-k}+N^{-1}+q^{-1}\right)\,.$$

□

2.6 Exponentialintegrale

Eine weitere Hauptidee zur Abschätzung von Weylschen Exponentialsummen, die auf van der Corput zurückgeht, besteht darin, diese durch Exponentialintegrale abzuschätzen:

Definition 2.6.1. Unter einem Exponentialintegral versteht man ein Integral der Form

$$\int_a^b g(x)e(f(x))dx\ ,$$

wobei f und g auf dem Intervall $[a,b]$ stetig-differenzierbar sind.

Der einfachste Fall ist wiederum der, in dem f ein lineares Polynom und $g(x)=1$ konstant ist. Hier lässt sich das Integral direkt auswerten. Dieser Fall liefert auch die Grundidee für die Behandlung des allgemeinen Falls. Es sei also $f(x)=\lambda_1 x+\lambda_0$ mit $\lambda_0,\lambda_1\in\mathbb{R}$ und $\lambda_1\neq 0$, dann ist

$$\int_a^b e(f(x))dx \;=\; \frac{1}{2\pi i\lambda_1}\left(e(\lambda_1 b+\lambda_0)-e(\lambda_1 a+\lambda_0)\right)\ . \tag{2.1}$$

Insbesondere ist

$$\int_a^b e(f(x))dx \;=\; O\left(\frac{1}{m}\right)\ ,$$

wobei m eine untere Schranke für die Größe der Ableitung $|f'(x)|$ ist: $|f'(x)|\geq m:=\lambda_1$. Die Größe der Ableitung $f'(x)$ misst die Schnelligkeit der Oszillation des Integranden $e(f(x))$. Die Funktion $e(\lambda_1 x+\lambda_0)$ hat die Periode $\frac{1}{|\lambda_1|}=\frac{2\pi}{|f'(x)|}$. Schnelle Oszillation des Integranden bewirkt einen kleinen Wert des Exponentialintegrals

$$\int_a^b e(f(x))dx\ .$$

Diese Beobachtung gilt auch für allgemeinere Situationen:

Lemma 2.6.2. *Es sei $a<b$ und $f,g:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig-differenzierbar auf $[a,b]$. Es sei $\frac{g(x)}{f'(x)}$ monoton auf $[a,b]$ und $\left|\frac{f'(x)}{g(x)}\right|\geq m>0$, dann gilt*

$$\left|\int_a^b g(x)e(f(x))dx\right| \;\leq\; \frac{6}{m}\ . \tag{1}$$

Beweis. Wir behandeln (1) zunächst für den Spezialfall $f(x)=x$ und schätzen

$$\int_a^b g(x)e(x)dx$$

mit g monoton und stetig-differenzierbar ab. Partielle Integration ergibt

$$\int_a^b g(x)e(x)dx \;=\; g(b)\left(\int_a^b e(x)dx\right)-\int_a^b g'(x)\left(\int_a^x e(u)du\right)dx \;\leq\; 2|g(b)|+2(|g(a)|+|g(b)|) \;\leq\; \frac{6}{m}\ . \tag{2}$$

Im allgemeinen Fall substituieren wir $u=f(x)$ und definieren α,β durch $f(a)=\alpha$ und $f(b)=\beta$. Es sei $f^{-1}(u)$ die Umkehrfunktion von f. Wegen

$$\frac{df^{-1}(u)}{du} \;=\; \frac{1}{f'(f(u))}$$

erhalten wir aus (2)

$$\int_a^b g(x)e(f(x))dx \;=\; \int_\alpha^\beta e(u)\frac{g(f^{-1}(u))}{f'(f^{-1}(u))}du \;\leq\; \frac{6}{m}\ .$$

□

Als nächstes betrachten wir die Möglichkeit, dass die Ableitung $f'(x)$ im Exponentialintegral in einem Punkt c des Integrationsbereichs verschwindet: $f'(c) = 0$. Man sagt dann auch: $e(f(x))$ besitzt in $x = c$ eine stationäre Phase. Grob gesagt ist c ein Punkt, in dessen unmittelbarer Umgebung $e(f(x))$ nicht oszilliert.

Lemma 2.6.3. *Es sei $a < b$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig-differenzierbar. Auf $[a,b]$ sei $f'(x) \neq 0$, $\frac{g(x)}{f'(x)}$ monoton und $|g(x)| \leq M$ sowie $|f''(x)| \geq r$. Dann ist*

$$\left| \int_a^b g(x)e(f(x))dx \right| < \frac{12M}{\sqrt{r}} .$$

Beweis. Wegen $e(-f(x)) = \overline{e(f(x))}$ genügt es, sich auf den Fall $f''(x) \geq r > 0$ zu beschränken. Dann ist $f'(x)$ auf $[a,b]$ monoton wachsend. Es gibt dann höchstens einen Punkt $c \in [a,b]$ mit $f'(c) = 0$. In diesem Fall setzen wir $c_0 = c$. Falls $f'(x) > 0$ ist für alle $x \in [a,b]$ setzen wir $c_0 = a$, falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist setzen wir $c_0 = b$. Für $\delta > 0$ sei $c_1(\delta) = \max(a, c_0 - \delta)$ sowie $c_2(\delta) = \min(b, c_0 + \delta)$. Wir zerlegen das Exponentialintegral zu

$$\int_a^b g(x)e(f(x))dx = I_1 + I_2 + I_3$$

mit

$$I_1 = \int_a^{c_1(\delta)} g(x)e(f(x))dx \;,\; I_2 = \int_{c_1(\delta)}^{c_2(\delta)} g(x)e(f(x))dx \;,\; I_3 = \int_{c_2(\delta)}^{b} g(x)e(f(x))dx$$

und bestimmen $\delta > 0$ später. In I_1 und I_3 oszilliert $e(f(x))$ stark, in I_2 bzw. der Umgebung der stationären Phase dagegen schwach. Ist $c_1(\delta) = a$, so ist $I_1 = 0$. Andernfalls ist für $x \in [a, c_1(\delta)]$

$$|f'(x)| \geq \int_{c-\delta}^{c} |f''(x)|dx > \delta \cdot r .$$

Nach Lemma 2.6.2 ist dann $|I_1| \leq \frac{6M}{\delta r}$. Eine analoge Abschätzung ergibt $|I_3| \leq \frac{6M}{\delta r}$. Schließlich wird I_2 trivial abgeschätzt: $|I_2| \leq 2\delta M$. Insgesamt erhalten wir

$$\left| \int_a^b g(x)e(f(x))dx \right| \leq \frac{12M}{\delta r} + 2\delta M .$$

Wir wählen δ so, dass beide Terme gleich groß sind:

$$\delta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{r}} .$$

Dafür erhalten wir

$$\left| \int_a^b g(x)e(f(x))dx \right| \leq \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{r}} M < \frac{12M}{\sqrt{r}} .$$

□

2.7 Die Methode von van der Corput

Wir kommen nun zum zentralen Satz, der Exponentialsummen mit Summen über Exponentialintegrale vergleicht. Wegen wichtiger Anwendungen wollen wir etwas allgemeinere Summen der Form

$$\sum_{a<n\leq b} g(n)e(f(n))$$

betrachten, in denen g eine stetig-differenzierbare Funktion ist. Die Grundidee des Beweises ist die Anwendung der Poissonschen Summenformel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(n) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\Phi}(n)$$

mit der Fouriertransformierten

$$\hat{\Phi}(n) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)e(-nu)du\,,$$

von Φ auf die Funktion

$$\Phi(u) \;=\; \begin{cases} g(u)e(f(u)) & \text{falls} \quad a<u\le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Satz 2.7.1. *Es sei $a<b$ und $f:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig-differenzierbar mit monotoner Ableitung $f'(x)$. $g:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ sei positiv, monoton fallend und stetig-differenzierbar, so dass $|g'(x)|$ monoton fallend ist. Ist $\alpha=f'(b)$ und $\beta=f'(a)$, so gilt*

$$\sum_{a<n\le b} g(n)e(f(n)) \;=\; \sum_{\alpha-\eta<\nu\le\beta+\eta} \int_a^b g(x)e(f(x)-\nu x)dx \;+\; O\left(g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)\right) \;+\; O(|g'(a)|) \tag{1}$$

mit einer beliebigen Konstanten $0<\eta<1$.

Bemerkung 2.7.2. Die Summationsbedingung $\alpha-\eta<\nu\le\beta+\eta$ besagt, dass die stationäre Phase des Integrals

$$\int_a^b g(x)e(f(x)-\nu x)dx$$

ins Innere des Intervalls (a,b) fällt (oder nicht weit davon entfernt ist):

$$\exists x_\nu\in(a,b):\ \frac{d}{dx}(f(x_\nu)-\nu x_\nu) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists x_\nu\in(a,b):\ f'(x_\nu) \;=\; \nu \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \;=\; f'(b) \;\le\; \nu \;\le\; f'(a) \;=\; \beta$$

da f' stetig und monoton fallend ist.

Beweis von Satz 2.7.1. Wir können $\beta-\alpha\ge 10$ annehmen, zudem ist ohne Einschränkung $a=m_1+\frac{1}{2}$ und $b=m_2+\frac{1}{2}$ für $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$. Es sei nämlich $(\tilde{a},\tilde{b})$ das größte in (a,b) enthaltene Teilintervall von der Form $(m_1+\frac{1}{2},m_2+\frac{1}{2})$: wegen

$$\sum_{\alpha-\eta<\nu\le\beta+\eta} e(f(t)-\nu t) \;\ll\; (\beta-\alpha+2)+\frac{1}{\|t\|}$$

ändert sich die rechte Seite von (1) höchstens um

$$O\left(g(a)\cdot\left(\int_0^{(\beta-\alpha+2)^{-1}} (\beta-\alpha+2)dt + \int_{(\beta-\alpha+2)^{-1}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}dt\right)\right) \;=\; O\left(g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)\right)\,.$$

Die linke Seite von (1) ändert sich um $O(g(a))$. Indem wir $f(x)$ gegebenenfalls durch $h(x)=f(x)-kx$ für $k\in\mathbb{Z}$ ersetzen, können wir zudem annehmen, dass $\eta-1<\alpha\le\eta$ ist. Wie in Abschnitt 1.6 sind Dirichletkern D_n und Fejérkern F_n gegeben durch

$$D_N(x) \;=\; \sum_{k=-N}^{N} e(kx) \quad,\quad F_N(x) \;=\; \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} D_k(x)\,.$$

Nach Satz 1.6.5 gilt für $\Phi:\,\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig

$$\lim_{N\to\infty} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \Phi(t)F_N(t)dt \;=\; \Phi(n) \tag{2}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Es ist klar, dass (2) auch schon gilt, wenn Φ auf $[n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]$ stetig ist. Wir wenden (2) an mit

$$\Phi(t) \;=\; \begin{cases} g(t)e(f(t)) & \text{falls} \quad a \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten

$$\sum_{a<n\le b} g(n)e(f(n)) \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{\nu=-k}^{k} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt\,. \tag{3}$$

Es sei $I = (\alpha-\eta, \beta+\eta)$. Wir schätzen die Summe

$$\sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I}}^{k} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt$$

ab. Wir haben

$$\int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \;=\; \frac{1}{2\pi i}\left(J_1(\nu)-J_2(\nu)\right) \tag{4}$$

mit

$$J_1(\nu) \;:=\; \int_a^b \frac{1}{f'(t)-\nu}\cdot\frac{d}{dt}\left(g(t)e(f(t)-\nu t)\right)dt \;\;,\;\; J_2(\nu) \;:=\; \int_a^b \frac{g'(t)}{f'(t)-\nu}\cdot e\left(f(t)-\nu t\right)dt\,.$$

Wegen $e(\nu a) = e(\nu b) = (-1)^\nu$ und der Monotonie von $f'(x)-\nu$ haben wir für $\nu \notin I$

$$J_1(\nu) \;=\; \left[g(t)\frac{e(f(t)-\nu t)}{f'(t)-\nu}\right]_a^b - \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f'(t)-\nu}\right)dt$$

$$= \frac{(-1)^{\nu+1}}{\alpha-\nu}g(b) - \frac{(-1)^{\nu+1}}{\beta-\nu}g(a) + O\left(g(a)\cdot\left|\frac{1}{\alpha-\nu}-\frac{1}{\beta-\nu}\right|\right)\,.$$

Wir teilen die Summe

$$\sum_{\substack{n=-k\\ \nu\notin I}}^{k} J_1(\nu) \;=\; \Sigma_1 + \Sigma_2$$

auf mit

$$\Sigma_1 \;:=\; \sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I\\ |\nu|\le 4(\beta-\alpha)}}^{k} J_1(\nu) \;\;,\;\; \Sigma_2 \;:=\; \sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I\\ |\nu|>4(\beta-\alpha)}}^{k} J_1(\nu)\,.$$

Die alternierenden Summen $\sum \frac{(-1)^{\nu+1}}{\alpha-\nu}$ und $\sum \frac{(-1)^{\nu+1}}{\beta-\nu}$ sind $O(1)$ nach dem Leibniz-Kriterium. Für $|\nu| > 4(\beta-\alpha)$ ist $\frac{1}{\alpha-\nu} < \frac{2}{\nu}$ sowie $\frac{1}{\beta-\nu} < \frac{2}{\nu}$, und daher

$$\left|\frac{1}{\alpha-\nu}-\frac{1}{\beta-\nu}\right| \;\le\; \frac{4(\beta-\alpha)}{\nu^2}\,.$$

Wir erhalten $\Sigma_1 \ll g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)$ und $\Sigma_2 \ll g(a)$. Damit ist

$$\sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I}}^{k} J_1(\nu) \;\ll\; g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)\,. \tag{5}$$

Nach Lemma 2.6.2 ist

$$J_2(\nu) \;\ll\; |g'(a)|\cdot\left(\frac{1}{(\alpha-\nu)^2}+\frac{1}{(\beta-\nu)^2}\right) \tag{6}$$

und damit

$$\sum_{\substack{\nu=-k \\ \nu\notin I}}^{k} J_2(\nu) \ \ll \ |g'(a)| \, .$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\sum_{\substack{\nu=-k \\ \nu\notin I}}^{k} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \ \ll \ g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)+|g'(a)| \, ,$$

also

$$\sum_{\nu=-k}^{k} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \ = \ \sum_{\alpha-\eta<\nu\le\beta+\eta} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \ + \ O\left(g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)\right) \ + \ O(|g'(a)|) \, .$$

Mit (3) folgt die Behauptung des Satzes. □

Satz 2.7.3. *Es sei $a<b$, $f:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f'(x)$ monoton. Es sei $|f'(x)|\le\theta<1$, dann gilt*

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \ = \ \int_a^b e(f(x))dx \ + \ O_\theta(1) \, .$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $f'(x)$ als monoton fallend annehmen. Wir wenden Satz 2.7.1 mit $\eta<1-\theta$ an, dann wird die Summationsbedingung $\alpha-\eta<\nu\le\beta+\eta$ entweder allein für $\nu=0$ oder für kein ν erfüllt. □

Satz 2.7.4 (Hardy-Littlewood-Approximation). *Es sei $\sigma\ge\sigma_0>0$ und $|t|<\frac{2\pi x}{C}$ für ein festes $C>1$, dann gilt*

$$\zeta(s) \ = \ \sum_{n\le x} n^{-s} \ - \ \frac{x^{1-s}}{1-s} \ + \ O_{\sigma_0,C}(x^{-\sigma}) \, . \tag{HL}$$

Beweis. Nach der Eulerschen Summenformel gilt für $\sigma>0$

$$\zeta(s) \ = \ \sum_{n=1}^{N} n^{-s} \ - \ s\int_N^\infty (u-[u]-\frac{1}{2})u^{-s-1}du \ - \ \frac{N^{1-s}}{1-s} \ - \ \frac{1}{2}N^{-s} \tag{1}$$

Wir wenden Satz 2.7.1 auf die Summe

$$\sum_{x<n\le N} n^{-s}$$

an mit $f(u)=-\frac{t\log(u)}{2\pi}$ und $g(u)=u^{-s}$. Wegen der Bedingung $|t|<\frac{2\pi x}{C}$ gilt

$$|f'(u)| \ = \ \left|\frac{t}{2\pi u}\right| \ < \ 1$$

für $u>x$. Die Summationsbedingung $\alpha-\eta<\nu\le\beta+\eta$ ist für den einzigen Term $\nu=0$ erfüllt, und wir erhalten

$$\sum_{x<n\le N} n^{-s} \ = \ \int_x^N u^{-s}du \ + \ O_{\sigma_0,C}(x^{-\sigma}) \ = \ -\frac{x^{1-s}}{1-s} \ + \ \frac{N^{1-s}}{1-s} \ + \ O_{\sigma_0,C}(x^{-\sigma}) \, .$$

Die Behauptung (HL) folgt nun aus (1) für $N\to\infty$. □

2.8 Abschätzung von Weylschen Exponentialsummen nach van der Corput

Die Ergebnisse des vorigen Abschnitts können auf die Abschätzung von Weylschen Exponentialsummen

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n))$$

selbst angewendet werden, wenn man über geeignete Schranken für die zweite Ableitung f'' verfügt.

Satz 2.8.1. *Es sei $a < b$ mit $b \ge a+1$. Es sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig-differenzierbar und*

$$0 \ <\ \lambda_2 \ \le\ |f''(x)| \ \le\ h\cdot\lambda_2\,.$$

Dann ist

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \ \ll\ h\cdot(b-a)\cdot\lambda_2^{\frac{1}{2}} \ +\ \lambda_2^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Beweis. Wir können $\lambda_2 < 1$ annehmen, da die Behauptung sonst trivial ist. Die Voraussetzungen von Satz 2.7.1 sind dann erfüllt. Es sei $f'(b) = \alpha$ sowie $f'(a) = \beta$. Nach Satz 2.7.1 ist mit beliebigem η und $0 < \eta < 1$ dann

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \ =\ \sum_{a-\eta<\nu\le\beta+\eta} \int_a^b e(f(x)-\nu x)dx \ +\ O(\log(\beta-\alpha+2))\,.$$

Nach Lemma 2.6.3 ist

$$\int_a^b e(f(x)-\nu x)dx \ \ll\ \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

für alle ν. Es ist

$$\beta-\alpha \ =\ f'(b)-f'(a) \ =\ O\left((b-a)\cdot h\cdot\lambda_2\right)\,, \tag{2}$$

und wegen

$$\log(\beta-\alpha+2) \ =\ O(\log(\beta-\alpha+2)) \ =\ O((b-a)\lambda_2) \ +\ O(1) \ =\ O((b-a)\cdot h\cdot\lambda_2^{\frac{1}{2}}) \ +\ O(1)\,.$$

folgt die Behauptung. □

Exponentialsummen können auch behandelt werden, indem man zuerst einen - oder mehrere - verallgemeinerte Weylschritte anwendet, und den van der Corput-Schritt (Satz 2.7.1) auf die daraus entstehenden neuen Exponentialsummen. Man kann die Schritte auch beliebig hintereinander schalten.

Satz 2.8.2 (Weylschritt). *Es sei $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$, $a < u \le b$, $1 \le q \le b-a$, dann ist*

$$\left|\sum_{a<n\le b} e(f(n))\right| \ \ll\ \frac{b-a}{q^{\frac{1}{2}}} \ +\ \left(\frac{b-a}{q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\le b-\nu} e(f(n+\nu)-f(n))\right|\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Beweis. Wir definieren $e(f(n)) = 0$ falls $n \le a$ oder $n > b$ ist. Es ist

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \ =\ \frac{1}{q}\sum_{a<n\le b}\sum_{\nu=1}^{q} e(f(n+\nu)) \ +\ \theta(q+1)$$

mit $|\theta| \le 1$ (vgl. Übungsaufgabe 9). Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$\left|\sum_{a<n\le b} e(f(n))\right|^2 \ \ll\ \frac{1}{q^2}\cdot(b-a)\cdot\sum_{a<n\le b}\left|\sum_{\nu=1}^{q} e(f(n+\nu))\right|^2\,. \tag{1}$$

Es ist

$$\sum_{a<n\le b}\left|\sum_{\nu=1}^{q} e(f(n+\nu))\right|^2 \;=\; \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\nu_2=1}^{q}\sum_{a<n\le b} e(f(n+\nu_2)-f(n+\nu_1)) \;=\; \Sigma_1 \;+\; 2\Sigma_2$$

mit

$$\Sigma_1 \;=\; \sum_{\substack{1\le\nu_1,\nu_2\le q\\ \nu_1=\nu_2}}\sum_{a<n\le b} e(f(n+\nu_2)-f(n+\nu_1)) \;,\;\; \Sigma_2 \;=\; \sum_{\substack{1\le\nu_1,\nu_2\le q\\ \nu_1<\nu_2}}\sum_{a<n\le b} e(f(n+\nu_2)-f(n+\nu_1))\,.$$

Wir haben

$$\Sigma_1 \;\ll\; q(b-a)\,. \tag{2}$$

Für ein festes Paar (m,ν) mit $1\le\nu\le q-1$ und $m\in\mathbb{Z}$ gibt es $(q-\nu)$ Tripel (n,ν_1,ν_2) mit $1\le\nu_1\le q$, $1\le\nu_2\le q$ und $n+\nu_1=m$, $n+\nu_2=m+\nu$. Also

$$\Sigma_2 \;=\; \sum_{\nu=1}^{q-1}(q-\nu)\sum_m e(f(m+\nu)-f(m)) \;\le\; q\sum_{\nu=1}^{q-1}\left|\sum_m e(f(m+\nu)-f(m))\right|\,. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt die Behauptung. □

So wie in der Weylschen Methode die Polynome k-ten Grades P_k im Weylschritt durch die Anwendung der Differenzenoperatoren Δ_ν durch Polynome $(k-1)$-ten Grades $\Delta_\nu(P_k)$ ersetzt werden, so können jetzt Funktionen f, für deren k-te Ableitung Schranken gegeben sind, durch Funktionen $\Delta_\nu(f)$ ersetzt werden, für deren $(k-1)$-te Ableitung Schranken vorliegen.

Satz 2.8.3. *Es sei $a<n\le b$ mit $b-a\ge 1$. Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dreimal stetig-differenzierbar und*

$$\lambda_3 \;\le\; |f'''(x)| \;\le\; h\cdot\lambda_3\,,$$

dann ist

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \;\ll\; h^{\frac12}\cdot(b-a)\cdot\lambda_3^{\frac16} \;+\; (b-a)^{\frac12}\lambda_3^{-\frac16}\,.$$

Beweis. Wir können $\lambda_3\le 1$ und $\lambda_3^{-\frac13}\le b-a$ voraussetzen, da sonst die Behauptung trivial ist. Es sei

$$g(x) \;=\; \Delta_\nu(f)(x) \;=\; f(x+\nu)-f(x)\,,$$

dann ist

$$g''(x) \;=\; f''(x+\nu)-f''(x) \;=\; \nu\cdot f'''(x+\theta\nu) \tag{1}$$

mit $0<\theta<1$ nach dem Mittelwertsatz. Nach dem Weylschritt 2.8.2 haben wir

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \;\ll\; \frac{b-a}{q^{\frac12}} \;+\; \left(\frac{b-a}{q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\le b-\nu}\Delta_\nu(f)(n)\right|\right)^{\frac12}\,.$$

Mit Satz 2.8.1 und (1) folgt

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \;\ll\; \frac{b-a}{q^{\frac12}} \;+\; \left(\frac{b-a}{q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\left(h(b-a)\nu^{\frac12}\lambda_3^{\frac12}+\nu^{-\frac12}\lambda_3^{-\frac12}\right)\right)^{\frac12}$$

$$\ll\; \frac{b-a}{q^{\frac12}} \;+\; \left(h(b-a)^2q^{\frac12}\lambda_3^{\frac12}+(b-a)q^{-\frac12}\lambda_3^{-\frac12}\right)^{\frac12}$$

$$\ll\; (b-a)q^{-\frac12} \;+\; h^{\frac12}(b-a)q^{\frac14}\lambda_3^{\frac14} \;+\; (b-a)^{\frac12}q^{-\frac14}\lambda_3^{-\frac14}\,.$$

Die beiden ersten Terme sind von der selben Größenordnung (in λ_3), wenn $q=[\lambda_3^{-\frac13}]$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir behandeln nun den allgemeinen Fall, in dem Schranken für die k-te Ableitung existieren. Im Hinblick auf Anwendungen ist es wichtig, dass die in den O- und $\ll$-Abschätzungen impliziten Konstanten unabhängig von k gewählt werden können.

Satz 2.8.4. *Es sei $k \geq 3$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig-differenzierbar, sowie*

$$\lambda_k \leq |f^{(k)}(x)| \leq h \cdot \lambda_k \ , \ b-a \geq 1 \ , \ K = 2^{k-1} \,,$$

dann ist

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \ll h^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{(2K-2)}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} \,.$$

Beweis. Wir können wieder $\lambda_k < 1$ und $f^{(k)}(x) > 0$ annehmen. Außerdem können wir

$$2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \leq b-a \tag{1}$$

annehmen, da sonst $\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} \geq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{1}{2}}$, also $(b-a)^{1-\frac{1}{2K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} \geq \frac{1}{2}(b-a)$ ist. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k. Der Fall $k=3$ ist Satz 2.8.3, es bleibt also noch der Schritt $k-1 \to k$ zu zeigen. Dazu sei $g(x) = f(x+\nu) - f(x)$, dann ist

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x+\nu) - f^{(k-1)}(x) = \nu \cdot f^{(k)}(\xi)$$

mit $x < \xi < x+\nu$ nach dem Mittelwertsatz. Deshalb gilt

$$\nu\lambda_k \leq g^{(k-1)}(x) \leq h\nu\lambda_k \,.$$

Nach Induktionsannahme folgt

$$\left|\sum_{a<n\leq b} e(g(n))\right| < A_1 h^{\frac{4}{K}}(b-a)(\nu\lambda_k)^{\frac{1}{K-2}} + A_2(b-a)^{1-\frac{4}{K}} \cdot (\nu\lambda_k)^{-\frac{1}{K-2}}$$

mit absoluten Konstanten $A_1, A_2 > 0$. Deshalb gilt für $1 \leq q \leq b-a$:

$$\sum_{\nu=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\leq b-\nu} e(g(n))\right| < A_1 h^{\frac{4}{K}}(b-a)q^{1+\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{\frac{1}{K-2}} + 2A_2(b-a)^{1-\frac{4}{K}}q^{1-\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{-\frac{1}{K-2}} \,, \tag{2}$$

da wegen $k \geq 4$

$$\sum_{\nu=1}^{q-1}\nu^{-\frac{1}{K-2}} < \int_0^q u^{-\frac{1}{K-2}}du = \frac{q^{1-\frac{1}{K-2}}}{1-\frac{1}{K-2}} \leq 2q^{1-\frac{1}{K-2}}$$

gilt. Nach dem Weylschritt 2.8.2 und (2) folgt mit absoluten Konstanten $A_3, A_4 > 0$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \\
&\leq A_3(b-a)q^{-\frac{1}{2}} + A_4(b-a)^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(A_1 h^{\frac{4}{K}}(b-a)q^{1+\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{-\frac{1}{K-2}} + 2A_2(b-a)^{1-\frac{4}{K}}q^{1-\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{-\frac{1}{K-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq A_3(b-a)q^{-\frac{1}{2}} + A_4A_1^{\frac{1}{2}}h^{\frac{2}{K}}(b-a)q^{\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{\frac{1}{2K-4}} + A_4(2A_2)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{1-\frac{2}{K}}q^{-\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-4}} \,.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun $q = q(\lambda_k)$ so, dass in den ersten beiden Termen die gleiche Potenz von λ_k auftritt, d. h. $q = [\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}}] + 1$. Die Bedingung $q \leq b-a$ in Satz 2.8.2 ist wegen (1) erfüllt. Es ist

$$\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \leq q \leq 2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \ , \ q^{\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{\frac{1}{2K-4}} \leq 2^{\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{\frac{1}{2K-4}(1-\frac{1}{K-1})} \leq 2\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} \,,$$

und wir erhalten

$$\left|\sum_{a<n\le b} e(f(n))\right| \le \left(A_3 + 2A_4A_1^{\frac{1}{2}}\right) h^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + A_4(2A_2)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} .$$

Bis auf die Konstanten ist dies die Behauptung für k. Wenn A_1 und A_2 hinreichend groß sind, ist

$$A_3 + 2A_4A_1^{\frac{1}{2}} \le A_1 \;,\; A_4(2A_2)^{\frac{1}{2}} \le A_2 ,$$

womit der Induktionsschluss $k-1 \to k$ durchgeführt ist. □

Eine wichtige Anwendung dieses Resultats ist die Abschätzung der Riemannschen Zeta-Funktion im kritischen Streifen:

Satz 2.8.5. *Es sei $l \ge 3$ und $L = 2^{l-1}$, für $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$ gilt dann*

$$\zeta(\sigma+it) \ll |t|^{\frac{1}{2L-2}} \cdot \log|t| ,$$

wobei die O-Konstante von l unabhängig ist.

Beweis. Es genügt, den Beweis für $t \ge 0$ zu führen. Wir gehen von der Hardy-Littlewood-Abschätzung (Satz 2.7.4)

$$\zeta(s) = \sum_{n\le x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O_{\sigma,C}\left(x^{-\sigma}\right) \tag{1}$$

aus für $\sigma = \sigma_0 > 0$, $t < \frac{2\pi x}{C}$, und können $\sigma_0 \ge \frac{1}{2}$ annehmen. Wir wenden Satz 2.8.4 an mit

$$f(x) = -\frac{t\cdot\log(x)}{2\pi} \;,\; f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k(k-1)!\cdot t}{2\pi x^k} .$$

Für $a < n \le b \le 2a$ ist

$$\frac{(k-1)!\cdot t}{2\pi(2a)^k} \le \left|f^{(k)}(n)\right| \le \frac{(k-1)!\cdot t}{2\pi a^k} .$$

Die Voraussetzungen von Satz 2.8.4

$$\lambda_k \le \left|f^{(k)}(x)\right| \le h\cdot\lambda_k$$

sind also erfüllt mit der Wahl

$$\lambda_k = \frac{(k-1)!\cdot t}{2\pi(2a)^k} \;,\; h = 2^k .$$

Wir erhalten

$$\sum_{a<n\le b} n^{-it} \ll 2^{\frac{2k}{K}}\cdot a\cdot\left(\frac{(k-1)!\cdot t}{2\pi(2a)^k}\right)^{\frac{1}{2K-2}} + a^{1-\frac{2}{K}}\cdot\left(\frac{(k-1)!\cdot t}{2\pi(2a)^k}\right)^{-\frac{1}{2K-2}}$$

$$\ll a^{1-\frac{k}{2K-2}}\cdot t^{\frac{1}{2K-2}} + a^{1-\frac{2}{K}+\frac{k}{2K-2}}\cdot t^{-\frac{1}{2K-2}} .$$

Die beiden Terme sind gleich, falls $a = t^{\frac{K}{kK-2K+2}}$ ist. Falls daher

$$a < A\cdot t^{\frac{K}{kK-2K+2}} \tag{2}$$

mit einer absoluten Konstanten $A > 0$ gilt, kann der zweite Term weggelassen werden. Gilt (2), so folgt durch partielle Summation

$$\sum_{a<n\le b} n^{-s} \ll a^{1-\sigma-\frac{k}{2K-2}}\cdot t^{\frac{1}{2K-2}}$$

und mit $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$ dann

$$\sum_{a<n\le b} n^{-s} \ll a^{\frac{l}{2L-2}-\frac{k}{2K-2}}\cdot t^{\frac{1}{2K-2}} . \tag{3}$$

Wir wenden dies mit $k := l$ an und erhalten

$$\sum_{a<n\leq b} n^{-s} \ll t^{\frac{1}{2L-2}} \tag{4}$$

für $a < A \cdot t^{\frac{L}{lL-2L+2}}$. Daraus folgt

$$\sum_{n\leq t^{\frac{L}{lL-2L+2}}} = \sum_j \sum_n n^{-s} ,$$

wobei über die (j, n) summiert wird mit

$$1 \leq 2^j \leq t^{\frac{L}{lL-2L-1}} \quad , \quad 2^{-j-1} \cdot t^{\frac{L}{lL-2L+2}} < n \leq 2^{-j} \cdot t^{\frac{L}{lL-2L+2}} .$$

Da über $O(\log(t))$ Werte von j summiert wird ist wegen (4)

$$\sum_{n\leq t^{\frac{L}{lL-2L+2}}} n^{-s} \ll t^{\frac{1}{2L-2}} \cdot \log(t) . \tag{5}$$

Wir behandeln nun die Summe

$$\sum_{t^{\frac{L}{lL-2L+2}}<n\leq t} = \sum_j \sum_{2^{-j}t<n\leq 2^{1-j}t} ,$$

wobei über alle j summiert wird mit

$$t^{\frac{L}{lL-2L+2}} \leq 2^{-j}t \leq t .$$

Zu jedem j gibt es ein $k < l$, so dass

$$t^{\frac{K}{(k+1)K-2K+1}} < 2^{-j}t \leq t^{\frac{K}{kK-2K+2}} .$$

Dann ist nach (3)

$$\sum_{2^{-j}t<n\leq 2^{1-j}t} n^{-s} \ll \exp\left(\log(t) \cdot \left(\left(\frac{l}{2L-2} - \frac{k}{2K-2}\right) \cdot \frac{K}{(k+1)K-2K+1} + \frac{1}{2K-2}\right)\right) . \tag{6}$$

Nun ist $2^{l-k} \geq l-k$ und daher $(L-K) \geq (l-k)K$. Daraus folgt weiter $(K-1)(L-K) \geq (K-1)(l-k)$ und

$$-k(L-K)K - (L-K)K + (K-L)(1-2K) \geq ((l-k)K - k(L-K) + (k-l)K)$$

und schließlich

$$\left(\frac{l}{2L-2} - \frac{k}{2K-2}\right) \cdot \frac{K}{(k+1)K-2K+1} + \frac{1}{2K-2} \leq \frac{1}{2L-2} . \tag{7}$$

Aus (5), (6) und (7) folgt die Behauptung. □

Diese Abschätzung lässt sich mit Hilfe von Satz 1.10.13 zur Vergrößerung der nullstellenfreie Zone aus Satz 1.10.14 verwenden:

Satz 2.8.6 (Nullstellenfreie Zone, 2. Version). *Es gibt eine absolute Konstante $A_0 > 0$, so dass $\zeta(s) \neq 0$ ist für $t \geq 0$ und*

$$\sigma \geq 1 - A_0 \frac{\log(\log(t))}{\log(t)} .$$

Beweis. Nach Satz 2.8.5 ist

$$\zeta(s) \ll t^{\frac{1}{2L-2}} \cdot \log(t) \tag{1}$$

für $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$ und $l \geq 3$. Es sei $t \geq t_0$ gegeben. Die folgende Definition und die Abschätzungen gelten für hinreichend großes t_0. Wir setzen

$$l = \left[\frac{1}{\log(2)} \cdot \log\left(\frac{\log(t)}{\log(\log(t))}\right)\right]$$

und nehmen $l \geq 3$ an. Dann ist

$$L \leq 2^{\frac{1}{\log(2)}\log\left(\frac{\log(t)}{\log(\log(t))}\right)-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\log(t)}{\log(\log(t))},$$

sowie

$$L \geq \frac{1}{4}\cdot\frac{\log(t)}{\log(\log(t))}.$$

Deshalb

$$\frac{l}{2L-2} \geq \frac{l}{2L} \geq \frac{\log(\log(t)) - \log(\log(\log(t))) - \log(2)}{\log(2)}\cdot\frac{\log(\log(t))}{\log(t)} \geq \frac{(\log(\log(t)))^2}{\log(t)}.$$

Deshalb ist $\sigma \geq 1 - \frac{l}{2L-2}$, falls $\sigma \geq 1 - \frac{(\log(\log(t))^2}{\log(t)}$ ist. Nach (1) folgt

$$\zeta(s) \ll t^{\frac{1}{2L-2}}\cdot\log(t) \ll t^{\frac{1}{L}}\cdot\log(t) \ll t^{\frac{4\log(\log(t))}{\log(t)}}\cdot\log(t) = \log(t)^5.$$

Wir wenden jetzt Satz 1.10.13 an mit

$$\theta(t) = \frac{(\log(\log(t)))^2}{\log(t)}, \quad \Phi(t) = 5\log(\log(t))$$

und erhalten die Behauptung nach entsprechender Wahl der Vorkonstanten. Dass auch die Nebenbedingungen aus Satz 1.10.13 erfüllt sind rechnet man leicht nach. □

Diese verbesserte nullstellenfreie Zone übersetzt sich analog zu Satz 1.10.16 in ein verbessertes Restglied:

Satz 2.8.7 (Primzahlsatz mit Restglied, 2. Version). *Es gibt Konstanten* $c_0, c_1 > 0$ *mit*

$$\psi(x) = x + O\left(x\cdot\exp\left(-c_0\cdot\sqrt{\log(x)\log(\log(x))}\right)\right), \tag{PZ2a}$$

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x\cdot\exp\left(-c_1\cdot\sqrt{\log(x)\log(\log(x))}\right)\right). \tag{PZ2b}$$

Beweis. Wie in der ersten Version 1.10.16 brauchen wir nur die Abschätzung für $\psi(x)$ zu zeigen. Es sei also $T = T(x) > 1$, $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log(x)}$, $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$. T wird später so gewählt, dass wir das optimale Ergebnis erhalten. Nach Lemma 1.10.5 ist

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x\cdot\log(x)^2}{T}\right). \tag{2}$$

Wir ergänzen den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$$

mit $a = 1 - A_0\frac{\log(\log(T))}{\log(T)}$, wobei A_0 die Konstante aus dem vorhergehenden Satz ist. Es ist nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds = \operatorname*{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right) = x. \tag{3}$$

Satz 1.10.13 liefert neben der nullstellenfreien Zone auch die Abschätzung

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\left(\frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)}\cdot\log(t)\right) = O\left(\frac{\log(t)^2}{\log(\log(t))}\right)$$

für die Wahlen von Φ und θ im Beweis des vorigen Satzes, daraus folgen die Abschätzungen

$$\int_{c+iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T \cdot \log(\log(T))}\right) , \tag{4}$$

$$\int_{a-iT}^{c-iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T \cdot \log(\log(T))}\right) , \tag{5}$$

sowie

$$\int_{a-iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(x \cdot \exp\left(-A_0 \frac{\log(x)}{\log(T)} \cdot \log(\log(T))\right) \cdot \frac{\log(T)^3}{\log(\log(T))}\right) . \tag{6}$$

Die Restglieder in (4) und (5) sind monoton fallend in $T = T(x)$, während das Restglied in (6) in T monoton wächst. Das optimale Resultat wird nun erreicht, wenn (unter Vernachlässigung der Logarithmen die nicht in der Exponentialfunktion stehen)

$$\frac{x}{T} \;=\; x \cdot \exp\left(-A_0 \frac{\log(x)}{\log(T)} \cdot \log(\log(T))\right)$$

gilt, wir wählen also eine Funktion $T = T(x)$ mit

$$\frac{\log(T)^2}{\log(\log(T))} \;=\; \log(x) \quad \text{bzw.} \quad \log(T) \;=\; \sqrt{\log(x) \cdot \log(\log(x))} \tag{7}$$

bis auf multiplikative Konstanten und erhalten aus (2)-(7) das verbesserte Restglied

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; O\left(x \cdot \exp\left(-c_0 \cdot \sqrt{\log(x) \log(\log(x))}\right)\right) . \tag{8}$$

$\square$

Von Vinogradoff und Koroboff wurde das Restglied noch weiter verbessert zu

$$\pi(x) \;=\; \mathrm{li}(x) \;+\; O\left(x \cdot \exp(-c_1 \cdot \log(x)^{\frac{3}{5}} \log(\log(x))^{-\frac{1}{5}}\right) ,$$

dies ist das Ziel des nächsten Kapitels.

Kapitel 3

Die Methode von Vinogradoff und Koroboff

3.1 Einleitung, Hua's Lemma

Die Idee im Weylschritt (Satz 2.8.2) war, Exponentialsummen durch die Mittelwertbildung abzuschätzen. Dies ist auch die Idee in der Methode von Vinogradoff und Koroboff. Man betrachtet hier Mittelwerte der folgenden Form:

Definition 3.1.1. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{N}$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Man setzt dann

$$I \;=\; I(P; n, k) \;=\; \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{1 \le x \le P} e(F(x, \vec{\alpha})) \right|^{2k} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \,, \tag{1}$$

mittelt also über sämtliche Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Es ergibt sich ein Wechselspiel zwischen Mittelwerten der Form (1) und Lösungsanzahlen von Systemen Diophantischer Gleichungen. Dieses Wechselspiel wird in einfacher Form in Hua's Lemma sichtbar, in dem nur über einen einzigen Parameter α gemittelt wird, infolgedessen nur eine einzige Diophantische Gleichung betrachtet wird.

Definition 3.1.2. Es sei $P \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$. Für $\lambda \in \mathbb{Z}$ sei $\tilde{J} = \tilde{J}(P; n, k, \lambda)$ die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x_1^n + \cdots + x_k^n - y_1^n - \cdots - y_k^n \;=\; \lambda \tag{D_λ}$$

mit $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{Z}^{2k}$, $1 \le x_j, y_j \le P$, $1 \le j \le k$. Zur Abkürzung sei $\tilde{J}(P; n, k, 0) =: \tilde{J}(P; n, k)$ gesetzt.

Das nächste Lemma beschreibt den Zusammenhang zwischen $\tilde{J}$ und dem Mittelwert einer gewissen Exponentialsumme:

Lemma 3.1.3. *Es sei $\lambda \in \mathbb{Z}$, dann gilt*

$$\text{(a)} \qquad \tilde{J}(P;n,k,\lambda) \;=\; \int_0^1 \left| \sum_{1\le x\le P} e(\alpha x^n) \right|^{2k} e(-\alpha\lambda)d\alpha\,.$$

$$\text{(b)} \qquad \tilde{J}(P;n,k,\lambda) \le \tilde{J}(P;n,k,0) \;=\; \tilde{J}(P;n,k)\,.$$

$$\text{(c)} \qquad \sum_\lambda \tilde{J}(P;n,k,\lambda) \;=\; P^{2k}\,.$$

$$\text{(d)} \qquad \left| \sum_{1\le x\le P} e(\alpha x^n) \right|^{2k} \;=\; \sum_\lambda \tilde{J}(P;n,k,\lambda)e(\alpha\lambda)\,.$$

$$\text{(e)} \qquad \tilde{J}(P;n,k,\lambda) \;=\; \tilde{J}(P;n,k,-\lambda)\,.$$

Beweis. Es ist

$$\int_0^1 \left| \sum_{1\le x\le P} e(\alpha x^n) \right|^{2k} e(-\alpha\lambda)d\alpha \;=\; \sum_{\substack{1\le x_1,\ldots,x_k\le P\\ 1\le y_1,\ldots,y_k\le P}} \int_0^1 e(\alpha(x_1^n+\cdots+x_k^n-y_1^n-\cdots-y_k^n-\lambda))d\alpha\,.$$

Das Integral nimmt den Wert Eins genau dann an, wenn (D_λ) gilt, d. h. wenn

$$x_1^n+\cdots+x_k^n-y_1^n-\cdots-y_k^n-\lambda \;=\; 0$$

ist, ansonsten ist das Integral Null, woraus (a) folgt. Teil (b) folgt sofort aus $|e(-\alpha\lambda)|=1$. Teil (c) folgt aus

$$P^{2k} \;=\; \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)\\ 1\le x_j,y_j\le P}} 1 \;=\; \sum_\lambda \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)\\ (D_\lambda)}} \;=\; \sum_\lambda \tilde{J}(P;n,k,\lambda)\,.$$

Zu (d): Es ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1\le x\le P} e(\alpha x^n) \right|^{2k} &= \sum_{1\le x_j,y_j\le P} e(\alpha(x_1^n+\cdots+x_k^n-y_1^n-\cdots-y_k^n)) \\ &= \sum_\lambda \sum_{\substack{1\le x_j,y_j\le P\\ (D_\lambda)}} e(\alpha\lambda) \;=\; \sum_\lambda \tilde{J}(P;n,k,\lambda)e(\alpha\lambda)\,. \end{aligned}$$

Zu (e): Dies folgt aus der Bijektivität der Abbildung $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k) \leftrightarrow (y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k)$. ☐

Satz 3.1.4 (Hua's Lemma). *Für $n\ge 2$ und $\varepsilon>0$ ist $\tilde{J}(P;n,k,2^{n-1}) \underset{n,\varepsilon}{\ll} P^{2^n-n+\varepsilon}$.*

Beweis. Wir beweisen durch Induktion nach l, dass $\tilde{J}(P;n,2^{l-1}) \underset{n,\varepsilon}{\ll} P^{2^l-l+\varepsilon}$ ist.

<u>$l=1$:</u>
Nach Definition 3.1.2 ist $\tilde{J}(P;n,1)$ die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x_1^n-y_1^n \;=\; 0 \quad,\quad 1\le x_1,y_1\le P\,. \qquad (D_0)$$

Sie ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $x_1=y_1$ ist, also $\tilde{J}(P;n,1)=P$.

<u>$l \to l+1$:</u>
Wir wenden Lemma 2.2.7 an: Es ist

$$\sum_{1\le x\le P} e(\alpha x^n) \;=\; S(f) \;=\; \sum_{1\le x\le P} e(f(x))$$

mit $f(x) = \alpha x^n$ und

$$|S(f)|^{2^l} \;\le\; (2P+1)^{2^l-l-1} \sum_{|d_1|\le P} \cdots \sum_{|d_l|\le P} S_{d_l,\dots,d_1}(f) \tag{2}$$

mit

$$S_{d_l,d_{l-1},\dots,1}(f) \;=\; \sum_{x\in I(d_l,\dots,d_1)} e\left(\Delta_{d_l,\dots,d_1}(f)(x)\right) ,$$

wobei $I(d_l,\dots,d_1)$ ein Intervall von aufeinander folgenden Zahlen ist, das in $[1,P]$ liegt. Durch Induktion nach l zeigt man leicht, dass

$$\Delta_{d_l,\dots,d_1}(f)(x) \;=\; \alpha\cdot d_l d_{l-1}\cdots d_1 \cdot Q_{n-l}(x)$$

ist, mit einem Polynom $Q_{n-l}(x)$ vom Grad $n-l$ und ganzzahligen Koeffizienten. Nach (2) folgt

$$\begin{aligned} |S(f)|^{2^l} &\le (2P+1)^{2^l-l-1} \sum_{|d_1|\le P} \cdots \sum_{|d_l|\le P} \sum_{x\in I(d_l,\dots d_1)} e\left(\alpha d_l\cdots d_1 Q_{n-l}(x)\right) \qquad (3)\\ &\le (2P+1)^{2^l-l-1} \sum_{\lambda} r(\lambda) e(\alpha\lambda) , \end{aligned}$$

wobei $r(\lambda)$ die Anzahl der Faktorisierungen von λ in der Form $\lambda = d_l\cdots d_1 Q_{n-l}(x)$ mit $|d_j| \le P$ und $x \in I(d_l,\dots,d_1)$ ist. Wegen $|\lambda| \le P^n$ folgt nach Lemma 2.4.3

$$r(\lambda) \;\ll\; |\lambda|^{\varepsilon} \;\ll\; P^{\varepsilon} \tag{4}$$

für $\lambda \ne 0$. Da $Q_{n-l}(x) = 0$ für höchstens $n-l$ ganze Zahlen x ist, folgt

$$r(0) \;\ll\; P^l . \tag{5}$$

Andererseits gilt nach Lemma 3.1.3(d,e)

$$|S(f)|^{2^l} \;=\; \sum_{\lambda} \tilde{J}(P;n,2^{l-1},\lambda) e(-\alpha\lambda) . \tag{6}$$

Weiter ist nach Lemma 3.1.3(c)

$$\sum_{\lambda} \tilde{J}(P;n,2^{l-1},\lambda) \;=\; P^{2^l} \tag{7}$$

und nach Induktionsannahme

$$\tilde{J}(P;n,2^{l-1},0) \underset{l,\varepsilon}{\ll} P^{2^l-l+\varepsilon} . \tag{8}$$

Mit (3) und (6) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S(f)|^{2^{l+1}} d\alpha &= \int_0^1 |S(f)|^{2^l} |S(f)|^{2^l} d\alpha \\ &\le (2P+1)^{2^l-l-1} \int_0^1 \left(\sum_{\lambda'} r(\lambda') e(\alpha\lambda')\right) \left(\sum_{\lambda} \tilde{J}(P;n,2^{l-1},\lambda) e(-\alpha\lambda)\right) d\alpha \\ &= (2P+1)^{2^l-l-1} \sum_{\lambda} r(\lambda) \tilde{J}(P;n,2^{l-1},\lambda) \\ &= (2P+1)^{2^l-l-1} r(0)\tilde{J}(P;n,2^{l-1},0) + (2P+1)^{2^l-l-1} \sum_{\lambda\ne 0} r(\lambda)\tilde{J}(P;n,2^{l-1},\lambda) . \end{aligned}$$

Mit (4), (5), (7) und (8) folgt weiter

$$\begin{aligned}\int_0^1 |S(f)|^{2^l+1} d\alpha \;&\underset{n,\varepsilon}{\ll}\; P^{2^l-l-1}P^l P^{2^l-l+\varepsilon} + P^{2^l-l-1}P^\varepsilon \sum_{\lambda\neq 0} \tilde{J}(P;n,2^{l-1},\lambda) \\ &\ll\; P^{2^{l+1}-(l+1)+\varepsilon} + P^{2^l-l-1}P^\varepsilon P^{2^l} \;\ll\; P^{2^{l+1}-(l+1)+\varepsilon}\end{aligned}$$

und damit die Induktionsbehauptung. □

3.2 Grundlegende Eigenschaften von $J(P;n,k)$

An Stelle der einzelnen Gleichung $x_1^n + \cdots + x_k^n - y_1^n - \cdots - y_k^n = \lambda$ aus Definition 3.1.2 betrachten wir nun das System

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k & - & y_1 - \cdots - y_k & = & \lambda_1 \\ x_1^2 + \cdots + x_k^2 & - & y_1^2 - \cdots - y_k^2 & = & \lambda_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n & - & y_1^n - \cdots - y_k^n & = & \lambda_n \end{cases} . \tag{S_Λ}$$

Definition 3.2.1. Es sei $P \geq 1$ ganz, $n, k \in \mathbb{N}$ und $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$. Unter $\mathcal{L}(P;\Lambda)$ verstehen wir die Menge der Lösungen $(\vec{x}, \vec{y})$ des Systems (S_Λ) mit $1 \leq x_j, y_j \leq P$ für $1 \leq j \leq k$. Wir setzen $J = J(P;n,k,\Lambda) = |\mathcal{L}(P,\Lambda)|$. Für $\Lambda = \vec{0}$ schreiben wir kurz $J(P;n,k) = J(P;n,k,\vec{0})$. Sind $A, B \subseteq \mathbb{Z}^k$, so sei $J(n,k,\Lambda,A,B)$ die Anzahl der Lösungen (S_Λ) mit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in B$. Für $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}$ setzen wir zudem

$$F(x) \;=\; F(x, \vec{\alpha}) \;=\; \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n .$$

So wie die Anzahl $\tilde{J}(P;n,k)$ der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x_1^n + \cdots + x_k^n - y_1^n - \cdots - y_k^n \;=\; 0$$

durch den Mittelwert von

$$\left| \sum_{1 \leq x \leq P} e(\alpha x^n) \right|^{2k}$$

über den einzigen Parameter α ausgedrückt werden kann (Lemma 3.1.3), kann $J(P;n,k)$ durch den Mittelwert von

$$\left| \sum_{1 \leq x \leq P} e(F(x, \vec{\alpha})) \right|^{2k}$$

über die sämtlichen Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ausgedrückt werden. Es ist

$$J(P;n,k) \;=\; I(P;n,k) \;=\; \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{1 \leq x \leq P} e(F(x, \vec{\alpha})) \right|^{2k} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n$$

(vgl. Definition 3.1.1). Das folgende Lemma ist ein Analogon von Lemma 3.1.3:

Lemma 3.2.2. *Es sei $\Lambda \in \mathbb{Z}^n$, dann gilt*

$$\text{(a)} \qquad J(P;n,k,\Lambda) \;=\; \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{1\le x\le P} e(\alpha x^n) \right|^{2k} e(-\alpha_1\lambda_1 - \cdots - \alpha_n\lambda_n)\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_n\,.$$

$$\text{(b)} \qquad J(P;n,k,\Lambda) \le J(P;n,k,\vec{0}) \;=\; J(P;n,k)\,.$$

$$\text{(c)} \qquad \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J(P;n,k,\Lambda) \;=\; P^{2k}\,.$$

$$\text{(d)} \qquad \left| \sum_{1\le x\le P} e(F(x,\vec{\alpha})) \right|^{2k} \;=\; \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J(P;n,k,\Lambda) e(\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n)\,.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{1\le x\le P} e(F(x,\vec{\alpha})) \right|^{2k} e(-\alpha_1\lambda_1 - \cdots - \alpha_n\lambda_n)\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \\
= &\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\sum_{1\le x_1\le P} e(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_1^n) \right) \cdots \left(\sum_{1\le x_k\le P} e(\alpha_1 x_k + \cdots + \alpha_n x_k^n) \right) \\
&\qquad \left(\sum_{1\le y_1\le P} e(-\alpha_1 y_1 - \cdots - \alpha_n y_1^n) \right) \cdots \left(\sum_{1\le y_k\le P} e(-\alpha_1 y_k - \cdots - \alpha_n y_k^n) \right) \\
&\qquad e(-\alpha_1\lambda_1 - \cdots - \alpha_n\lambda_n)\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \\
= &\sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)\\ 1\le x_j,y_j\le P}} \left(\int_0^1 e(\alpha_1(x_1 + \cdots + x_k - y_1 - \cdots - y_k - \lambda_1)\, d\alpha_1 \right) \cdots \\
&\qquad \left(\int_0^1 e(\alpha_n(x_1^n + \cdots + x_k^n - y_1^n - \cdots - y_k^n - \lambda_n)\, d\alpha_n \right)\,.
\end{aligned}$$

Das Produkt der n Integrale ist Eins für genau die $(2k)$-Tupel $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$, für die die Gleichungen des Systems (S_Λ) erfüllt sind, und sonst Null. Teil (b) folgt aus (a) wegen $|e(-\alpha_1\lambda_1 - \cdots - \alpha_n\lambda_n)| = 1$. Zu (c): Es ist

$$P^{2k} \;=\; \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)\\ 1\le x_j,y_j\le P}} 1 \;=\; \sum_{\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \sum_{(\vec{x},\vec{y})\in\mathcal{L}(P,\Lambda)} 1\,.$$

Teil (d) folgt aus

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{1\le x\le P} e(\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) \right|^{2k} &= \sum_{1\le x_j,y_j\le P} e(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_1^n) \cdots e(\alpha_1 x_k + \cdots + \alpha_n x_k^n) \\
&\qquad e(-\alpha_1 y_1 - \cdots - \alpha_n y_1^n) \cdots e(-\alpha_1 y_k - \cdots - \alpha_n y_k^n)\,. \\
&= \sum_{1\le x_j,y_j\le P} e(\alpha_1(x_1 + \cdots + x_k - y_1 - \cdots - y_k) + \cdots + \alpha_n(x_1^n + \cdots + x_k^n - y_1^n - \cdots - y_k^n)) \\
&= \sum_{\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \sum_{(\vec{x},\vec{y})\in\mathcal{L}(\Lambda)} e(\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n)\,.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.2.3. Wir setzen $\Omega = [0,1]^n$ und schreiben $\int \cdots d\Omega$ anstelle von

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \cdots d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \,.$$

Im nächsten Lemma formulieren wir weitere Eigenschaften der Lösungsmenge $\mathcal{L}(P,\vec{0})$ und der Zählfunktion J:

Lemma 3.2.4. *Es gilt:*

(a) *Die Lösungsmenge $\mathcal{L}(P,\vec{0})$ ist translationsinvariant, d. h. für $a \in \mathbb{Z}$ genügt*

$$(\vec{x},\vec{y}) \;=\; (x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$$

dem System $(S_{\vec{0}})$ genau dann, wenn

$$(\vec{x}-a,\vec{y}-a) \;=\; (x_1-a,\ldots,x_k-a,y_1-a,\ldots,y_k-a)$$

ihm genügt.

(b) *$J(P;n,k)$ ist auch die Lösungsanzahl des Systems $(S_{\vec{0}})$ unter den Zusatzbedingungen $1-a \le x_j, y_j \le P-a$ für $a \in \mathbb{Z}$.*

(c) *$J(P;n,k)$ ist monoton nicht-fallend in P.*

(d)

$$J(P;n,k) \;=\; \int \left| \sum_{1 \le x_1,\ldots,x_k \le P} e(F(x_1,\vec{\alpha}) + \cdots + F(x_k,\vec{\alpha})) \right|^2 d\Omega \,.$$

(e) *Es sei $A \subseteq \mathbb{Z}^k$ und $A = \bigcup_{s=1}^{m} A_s$ eine nicht notwendig disjunkte Vereinigung von Teilmengen A_s. Dann ist*

$$\int \left| \sum_{\vec{x} \in A} e(F(x_1,\vec{\alpha}) + \cdots + F(x_k,\vec{\alpha})) \right|^2 d\Omega \;\le\; m \sum_{s=1}^{m} \int \left| \sum_{\vec{x} \in A_s} e(F(x_1,\vec{\alpha}) + \cdots + F(x_k,\vec{\alpha})) \right|^2 d\Omega \,.$$

Beweis. Zu (a): $(\vec{x},\vec{y})$ erfülle $(S_{\vec{0}})$, d. h. es sei

$$x_1^l + \cdots + x_k^l \;=\; y_1^l + \cdots + y_k^l \;\;,\;\; 1 \le l \le n \,.$$

Wir beweisen durch Induktion nach l, dass auch

$$(x_1-a)^l + \cdots + (x_k-a)^l \;=\; (y_1-a)^l + \cdots + (y_k-a)^l \;\;,\;\; 1 \le l \le n \,.$$

gilt. Der Fall $l = 1$ ist klar, im Induktionsschritt $l \to l+1$ gilt

$$\begin{aligned}
(x_1-a)^{l+1} + \cdots + (x_k-a)^{l+1} \;&=\; x_1^{l+1} + \cdots + x_k^{l+1} + \sum_{j=0}^{l} \binom{l+1}{j} (x_1^j + \cdots + x_k^j)(-a)^{l+1-j} \\
&=\; y_1^{l+1} + \cdots + y_k^{l+1} + \sum_{j=0}^{l} \binom{l+1}{j} (y_1^j + \cdots + y_k^j)(-a)^{l+1-j} \\
&=\; (y_1-a)^{l+1} + \cdots + (y_k-a)^{l+1} \,.
\end{aligned}$$

Die Aussage (b) folgt unmittelbar aus (a), und Teil (c) ist klar, da für $P_1 \leq P_2$ jede Lösung des Systems $(S_{\vec{0}})$ mit $1 \leq x_j, y_j \leq P_1$ auch $1 \leq x_j, y_j \leq P_2$ erfüllt. Zu (d): Nach Lemma 3.2.2(a) ist

$$\begin{aligned} J(P;n,k) \;&=\; \int \sum_{1\leq x_1\leq P} e(F(x_1,\vec{\alpha}))\cdots \sum_{1\leq x_k\leq P} e(F(x_k,\vec{\alpha})) \\ &\qquad \sum_{1\leq y_1\leq P} e(-F(y_1,\vec{\alpha}))\cdots \sum_{1\leq y_k\leq P} e(-F(y_k,\vec{\alpha}))\, d\Omega \\ &=\; \int \Bigg| \sum_{1\leq x_1,\ldots,x_k\leq P} e(F(x_1,\vec{\alpha})+\cdots+F(x_k,\vec{\alpha}))\Bigg|^2 d\Omega\,. \end{aligned}$$

Zu (e): Eine Rechnung wie im Beweis von Lemma 3.2.2(a) ergibt

$$J(n,k,\vec{0},A,A) \;=\; \int \Bigg|\sum_{\vec{x}\in A} e(F(x_1,\vec{\alpha})+\cdots+F(x_k,\vec{\alpha}))\Bigg|^2 d\Omega\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned} J(n,k,\vec{0},A,A) \;&\leq\; \sum_{1\leq s,t\leq m} J(n,k,\vec{0},A_s,A_t) \\ &= \sum_{s,t}\int \Bigg(\sum_{\vec{x}\in A_s} e(F(x_1,\vec{\alpha})+\cdots+F(x_k,\vec{\alpha}))\Bigg)\Bigg(\sum_{\vec{x}\in A_t} e(-F(x_1,\vec{\alpha})-\cdots-F(x_k,\vec{\alpha}))\Bigg) d\Omega \\ &\leq \sum_{s,t}\frac{1}{2}\Bigg(\int\Bigg|\sum_{\vec{x}\in A_s} e(F(x_1,\vec{\alpha})+\cdots+F(x_k,\vec{\alpha}))\Bigg|^2 d\Omega + \int\Bigg|\sum_{\vec{x}\in A_t} e(F(x_1,\vec{\alpha})+\cdots+F(x_k,\vec{\alpha}))\Bigg|^2 d\Omega\Bigg) \\ &\leq\; m\sum_{s=1}^{m}\int\Bigg|\sum_{\vec{x}\in A_s} e(F(x_1,\vec{\alpha})+\cdots+F(x_k,\alpha))\Bigg|^2 d\Omega\,. \end{aligned}$$

□

3.3 Linnik's Lemma

Das Gleichungssystem des vorigen Abschnitts wird nun durch ein System von Kongruenzen ersetzt.

Lemma 3.3.1. *Es sei $p > n$ eine Primzahl und $1 \leq P \leq p^n$ sowie $a \in \mathbb{Z}$. Die Anzahl T der Lösungen des Systems (C_p) der Kongruenzen*

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_n & \equiv & y_1+\cdots+y_n & \bmod p \\ x_1^2+\cdots+x_n^2 & \equiv & y_1^2+\cdots+y_n^2 & \bmod p^2 \\ \quad\vdots & & \quad\vdots & \quad\vdots \\ x_1^n+\cdots+x_n^n & \equiv & y_1^n+\cdots+y_n^n & \bmod p^n \end{cases} \tag{C_p}$$

mit

$$1-a \leq x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \leq P-a \;\;,\;\; x_i \not\equiv x_j \bmod p \text{ für } i\neq j$$

erfüllt die Schranke $T \leq n!\cdot p^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot P^n$.

Zum Beweis von Lemma 3.3.1 benötigen wir

Lemma 3.3.2. *Es sei K ein Körper und $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gegeben. Es gelte*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \cdots + x_n & = & \lambda_1 \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 & = & \lambda_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n + \cdots + x_n^n & = & \lambda_n \end{array}$$

dann sind die $x_1, \ldots, x_n$ bis auf die Reihenfolge eindeutig durch die λ_j bestimmt.

Bemerkung 3.3.3. Lemma 3.3.2 folgt aus dem Hauptsatz über symmetrische Funktionen. Eine Folgerung daraus ist: Jede Potenzsumme $x_1^k + \cdots + x_n^k$, $1 \le k \le n$ kann als Polynom in den ersten elementarsymmetrischen Funktionen

$$\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n \ , \ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \ , \ \ldots \ , \ \sigma_k = x_1 \cdots x_k + \cdots + x_{n-k+1} \cdots x_n$$

geschrieben werden. σ_k ist bis auf das Vorzeichen der Koeffizient von x^{n-k} in dem Polynom $(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Für die Details verweisen wir auf die Vorlesung Algebra II.

Beweis von Lemma 3.3.1. Es ist $T \le P^n T_1$, wobei T_1 die Anzahl der Lösungen des folgenden Systems von Kongruenzen ist:

$$\left\{\begin{array}{ccll} x_1 + \cdots + x_n & \equiv & \lambda_1 & \bmod p \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 & \equiv & \lambda_2 & \bmod p^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n + \cdots + x_n^n & \equiv & \lambda_n & \bmod p^n \\ 1 \le x_1, \ldots, x_n \le p^n & , & & \\ \forall i \ne j : \ x_i \not\equiv x_j \bmod p & & & \end{array}\right. \qquad (C_p')$$

Dabei ist $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ein festes n-Tupel ganzer Zahlen. Für $t = 1, 2, \ldots, n$ schreiben wir x_t in der Form

$$x_t \ = \ x_{t,1} + p x_{t,2} + \cdots + p^{n-1} x_{t,n} \ , \ -a + 1 \le x_{t,1} \le P - a \ , \ 0 \le x_{t,2}, \ldots, x_{t,n} \le P - 1 \,. \qquad (1)$$

Es sei nun N_s die Anzahl der n-Tupel $(x_{1,s}, \ldots, x_{n,s})$, die in den Lösungen von (C_p') - die in der Form (1) dargestellt werden - auftreten können, wenn für die Koeffizienten $x_{t,1}, \ldots, x_{t,s-1}$ $(1 \le t \le n)$ eine feste Wahl getroffen wird:

$$x_{t,\nu} \ = \ \bar{x}_{t,\nu} \ \text{ für } \ 1 \le t \le n \ , \ 1 \le \nu \le s - 1 \,. \qquad (2)$$

Wir beginnen mit dem Fall $s = 1$: Eine notwendige Bedingung für (C_p') ist

$$x_{1,1}^\nu + \cdots + x_{n,1}^\nu \ \equiv \ \lambda_\nu \ \bmod \ p \ , \ \nu = 1, 2, \ldots, n \,. \qquad (3)$$

Aus Lemma 3.3.2 - angewandt mit dem Körper $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ - folgt, dass das n-Tupel $(x_{1,1}, \ldots, x_{n,1})$ bis auf die Reihenfolge der Koeffizienten eindeutig durch die rechte Seite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ von (3) bestimmt ist. Also ist

$$N_1 \ \le \ n! \,. \qquad (4)$$

Für $s \ge 2$ betrachten wir folgendes System, das aus (C_p') folgt:

$$\left\{\begin{array}{ccll} x_1^s + \cdots + x_n^s & \equiv & \lambda_s & \bmod p^s \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n + \cdots + x_n^n & \equiv & \lambda_n & \bmod p^n \end{array}\right. \qquad (5)$$

und nehmen an, dass in der Darstellung (1) $x_{t,\nu} = \bar{x}_{t,\nu}$ für $1 \le t \le n$, $1 \le \nu \le s - 1$ gilt. Dann wird (5) nach dem binomischen Lehrsatz zu

$$\sum_{t=1}^{n} \left(\bar{x}_{t,1}^\nu + \nu \bar{x}_{t,1}^{\nu-1} (p \bar{x}_{t,2} + \cdots + p^{s-2} \bar{x}_{t,s-1} + p^{s-1} x_{t,s} + p^s x_{t,s+1}\right) \qquad (6)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \binom{\nu}{2}\bar{x}_{t,1}^{\nu-1}(p\bar{x}_{t,2}+\cdots+p^{s-2}\bar{x}_{t,s-1}+p^{s-1}x_{t,s}+p^{s}x_{t,s+1}+\cdots)^2\\
&\vdots\\
&+ \left.(p\bar{x}_{t,2}+\cdots+p^{s-2}\bar{x}_{t,s-1}+p^{s-1}x_{t,s}+p^{s}x_{t,s+1}+\cdots)^{\nu}\right)\\
&\equiv \lambda_\nu \mod p^s
\end{aligned}
$$

für $s \le \nu \le n$. In (6) sind die Koeffizienten von $x_{t,m}$ für $m \ge s+1$ alle $\equiv 0 \bmod p^s$. Die Koeffizienten von $x_{t,s}$ sind $\equiv \nu\bar{x}_{t,1}^{\nu-1}p^{s-1} \bmod p^s$. Als notwendige Bedingung für (5) ergibt sich das System

$$\nu\bar{x}_{1,1}^{\nu-1}x_{1,s}+\nu\bar{x}_{2,1}^{\nu-1}x_{2,s}+\cdots+\nu\bar{x}_{n,1}^{\nu-1}x_{n,s} \equiv \lambda_{\nu,s} \mod p \ , \quad s\le\nu\le n \tag{7}$$

wobei die $\lambda_{\nu,s}$ durch $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ und die schon gewählten Koeffizienten $\bar{x}_{t,m}$, $1\le t\le n$, $m\le s-1$, eindeutig bestimmt sind. Fassen wir das Kongruenzsystem (7) als Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf, so hat dieses die Koeffizientenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} s\bar{x}_{1,1}^{s-1} \bmod p & \cdots & s\bar{x}_{n,1}^{s-1} \bmod p \\ (s+1)\bar{x}_{1,1}^{s} \bmod p & \cdots & (s+1)\bar{x}_{n,1}^{s} \bmod p \\ \vdots & & \vdots \\ n\bar{x}_{1,1}^{n-1} \bmod p & \cdots & n\bar{x}_{n,1}^{n-1} \bmod p \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die quadratische Untermatrix von M, die aus den ersten $(n-s+1)$ Spalten gebildet wird. Nach geeigneter Multiplikation der Zeilen und Spalten mit konstanten Faktoren geht daraus die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \bmod p & \cdots & 1 \bmod p \\ \bar{x}_{1,1} \bmod p & \cdots & \bar{x}_{n-s+1,1} \bmod p \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_{1,1}^{n-s+1} \bmod p & \cdots & \bar{x}_{n-s+1,1}^{n-s+1} \bmod p \end{pmatrix}$$

hervor, eine Vandermondsche Matrix mit Determinante

$$\det(Q) = \prod_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n-s+1} (\bar{x}_{i,1} \bmod p - \bar{x}_{j,1} \bmod p) \ne 0 \ \ (\text{in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Da somit die Koeffizientenmatrix M maximalen Rang $n-s+1$ hat, besitzt (7) höchstens p^{s-1} Lösungen. Damit gilt

$$N_s \le p^{s-1} \ \ (s\ge 2). \tag{8}$$

Aus (4) und (8) ergibt sich

$$T_1 \le n!\cdot p\cdot p^2\cdots p^{n-1} = n!\cdot p^{\frac12 n(n-1)}, \tag{9}$$

womit Lemma 3.3.1 bewiesen ist. □

3.4 Eine Rekursion für $J(P,n,k)$

Lemma 3.4.1. *Es seien $n,P\in\mathbb{N}$ mit $P>(4n^2)^n$, dann enthält $(P^{\frac1n},2P^{\frac1n})$ mindestens n Primzahlen.*

Ohne Beweis. □

Lemma 3.4.2. *Es seien $k,n,P\in\mathbb{N}$ mit $k\ge n$ und $P\ge 1$, dann gibt es $\rho\in(P^{\frac1n},2P^{\frac1n})$ mit*

$$J = J(P,n,k) \le 4k^{2n}\rho^{2k-2n+\frac12 n(n-1)}P^n\cdot J(P_1,n,k-n) + (2n)^{2kn}P^k \tag{1}$$

wobei $P_1=\lfloor P\rho^{-1}\rfloor$ ist.

Beweis. Für $P \leq (4n^2)^n$ ist der zweite Term in (1) mindestens P^{2k}, während der erste Term immer nichtnegativ ist, d. h. (1) folgt aus der trivialen Ungleichung

$$J(P;n,k) \;\leq\; P^{2k}\,.$$

Deshalb können wir annehmen, dass

$$P \;>\; (4n^2)^n \tag{2}$$

gilt. Nach Lemma 3.4.1 enthält das Intervall $(P^{\frac{1}{n}}, 2P^{\frac{1}{n}})$ mindestens n Primzahlen. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen aus diesem Intervall. Nach Lemma 3.2.4(d) ist

$$J \;=\; J(P;n,k) \;=\; \int \left| \sum_{1\leq x_1,\ldots,x_k\leq P} e(F(x_1,\vec{\alpha}) + \cdots + F(x_k,\vec{\alpha})) \right|^2 d\Omega\,. \tag{3}$$

Wir teilen die Menge k-Tupel $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $1 \leq x_j \leq P$, in zwei Klassen A und B. A besteht aus allen k-Tupeln $\vec{x}$, für die ein $p_s \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ existiert, so dass die Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ mindestens n verschiedenen Restklassen $\bmod\, p_s$ angehören, B aus den übrigen k-Tupeln. Nach Lemma 3.2.4(e) ist dann

$$J \;=\; \int \left| \sum_{\vec{x}\in A} \cdots + \sum_{\vec{x}\in B} \cdots \right|^2 d\Omega \;\leq\; 2\int \left| \sum_{\vec{x}\in A} \cdots \right|^2 d\Omega + 2\int \left| \sum_{\vec{x}\in B} \cdots \right|^2 d\Omega \;=:\; 2J_1 + 2J_2 \tag{4}$$

mit

$$\sum_{\vec{x}\in A} \cdots \;=\; \sum_{\vec{x}\in A} e(F(x_1,\vec{\alpha}) + \cdots + F(x_k,\vec{\alpha}))\;\;,\;\; \sum_{\vec{x}\in B} \cdots \;=\; \sum_{\vec{x}\in B} e(F(x_1,\vec{\alpha}) + \cdots + F(x_k,\vec{\alpha}))\,.$$

Wir schätzen zunächst J_1 ab: J_1 ist die Anzahl der Lösungen des Systems

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + \cdots + x_k & = & y_1 + \cdots + y_k \\ x_1^2 + \cdots + x_k^2 & = & y_1^2 + \cdots + y_k^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n + \cdots x_k^n & = & y_1^n + \cdots + y_k^n \;, \\ 1 \leq x_i, y_i \leq P & \text{für} & 1 \leq i \leq k \\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A & & \\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in A & & \end{array} \right. \tag{$S(A)$}$$

Wir unterteilen A in n Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$, wobei A_s aus denjenigen k-Tupeln $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ besteht, für die die Aussage

$$x_1, \ldots, x_k \text{ liegen in mindestens } n \text{ verschiedenen Restklassen mod } p_t$$

für $t = s$, aber nicht für $t < s$ gilt. Wir erhalten nach Lemma 3.2.4(e)

$$J_1 \;=\; \int \left| \sum_{\vec{x}\in A} \cdots \right|^2 d\Omega \;=\; \int \left| \sum_{s=1}^{n} \sum_{\vec{x}\in A_s} \cdots \right|^2 d\Omega \;\leq\; n \sum_{s=1}^{n} \int \left| \sum_{\vec{x}\in A_s} \cdots \right|^2 d\Omega \;=\; n \sum_{s=1}^{n} J_{1,s} \tag{5}$$

mit

$$J_{1,s} \;=\; \int \left| \sum_{\vec{x}\in A_s} \cdots \right|^2 d\Omega\,. \tag{6}$$

Wir leiten eine obere Schranke für $J_{1,s}$ her, indem wir A_s in (möglicherweise nicht disjunkte) Teilmengen $A_{s,\vec{t}}$ aufteilen: Dazu sei $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ mit natürlichen Zahlen $1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq k$. Es sei $A_{s,\vec{t}}$ die Menge aller k-Tupel $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A_s$, für die $x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}$ paarweise inkongruent mod p_s sind. Für zwei n-Tupel $\vec{t_1}$ und $\vec{t_2}$ sieht man sofort, indem man, falls nötig, die Nummerierung der Variablen x_i ändert, dass

$$\int \left| \sum_{\vec{x}\in A_{s,\vec{t_1}}} \cdots \right|^2 d\Omega \;=\; \int \left| \sum_{\vec{x}\in A_{s,\vec{t_2}}} \cdots \right|^2 d\Omega$$

gilt. Es sei $A_{s,1} := A_{s,\vec{t}}$ mit $\vec{t} = (1,2,\dots,n)$. Mit Lemma 3.2.4(e) folgt

$$J_{1,s} \;=\; \int \Bigg| \sum_{\vec{t}} \sum_{\vec{x}\in A_{s,\vec{t}}} \cdots \Bigg|^2 d\Omega \;\le\; \binom{k}{n}^2 \cdot \int \Bigg| \sum_{\vec{x}\in A_{s,1}} \cdots \Bigg|^2 d\Omega\,. \tag{7}$$

Es ist

$$\int \Bigg| \sum_{\vec{x}\in A_{s,1}} \cdots \Bigg|^2 d\Omega \;=\; \int \Bigg| \sum_{(x_1,\dots,x_n)}^{(*)} \Bigg|^2 \cdot \Bigg| \sum_{1\le x\le P} e(F(x,\vec{\alpha})) \Bigg|^{2k-2n} d\Omega\,, \tag{8}$$

wobei in der Summe $(*)$ die Terme $e(F(x_1,\vec{\alpha})+\cdots+F(x_n,\vec{\alpha}))$ über alle n-Tupel $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ summiert werden mit

$$1 \le x_j \le P\;,\; 1\le j\le n \;\text{ und }\; x_i \not\equiv x_j \bmod p_s \text{ für } 1\le i<j\le n\,.$$

Wir teilen die Summe

$$\sum_{1\le x\le P} e(F(x,\vec{\alpha}))$$

in p_s Summen auf:

$$\sum_{1\le x\le P} e(F(x,\vec{\alpha})) \;=\; \sum_{0\le w\le p_s-1} \sum_{\substack{x=w+p_s z\\ 1\le x\le P}} e(F(x,\vec{\alpha}))\,.$$

Mittels der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\Bigg| \sum_{1\le x\le P} e(F(x,\vec{\alpha})) \Bigg|^{2k-2n} \;=\; \Bigg| \sum_{0\le w\le p_s-1} \sum_{0\le z\le P\cdot p_s^{-1}} e(F(w+p_s z,\vec{\alpha})) \Bigg|^{2k-2n} \tag{9}$$

$$\le\; \Bigg(\sum_{0\le w\le p_s-1} 1 \Bigg)^{2k-2n-1} \cdot \Bigg(\sum_{0\le w\le p_s-1} \Bigg| \sum_{0\le z\le P\cdot p_s^{-1}} e(F(w+p_s z,\vec{\alpha})) \Bigg|^{2k-2n} \Bigg)\,.$$

Aus (6), (7), (8) und (9) erhalten wir

$$J_{1,s} \;\le\; \binom{k}{n}^2 \cdot p_s^{2k-2n-1} \cdot \sum_{0\le w\le p_s-1} \int \Bigg| \sum_{(x_1,\dots,x_n)}^{(*)} \Bigg|^2 \cdot \Bigg| \sum_{0\le z\le P\cdot p_s^{-1}} e(F(w+p_s z,\vec{\alpha})) \Bigg|^{2k-2n} d\Omega\,.$$

Dabei erstreckt sich die Summe $(*)$ über alle $(x_1,\dots,x_n)$ mit $x_i \not\equiv x_j \bmod p_s$ für $i\ne j$. Es sei w_0 so gewählt, dass das letzte Integral maximal ist. Wir erhalten

$$J_{1,s} \;\le\; \binom{k}{n}^2 \cdot p_s^{2k-2n} \cdot \int \Bigg| \sum_{(x_1,\dots,x_n)}^{(*)} \Bigg|^2 \cdot \Bigg| \sum_{0\le z\le P p_s^{-1}} e(F(w_0+p_s z,\vec{\alpha})) \Bigg|^{2k-2n} d\Omega\,. \tag{10}$$

Eine Rechnung wie in Lemma 3.2.2(a) ergibt, dass das Integral in (10) gleich der Lösungsanzahl des Systems

$$\begin{aligned}
x_1+\cdots+x_n+(w_0+p_s z_1)+\cdots+(w_0+p_s z_{k-n}) &= y_1+\cdots+y_n+(w_0+p_s v_1)+\cdots+(w_0+p_s v_{k-n})\\
x_1^2+\cdots+x_n^2+(w_0+p_s z_1)^2+\cdots+(w_0+p_s z_{k-n})^2 &= y_1^2+\cdots+y_n^2+(w_0+p_s v_1)^2+\cdots+(w_0+p_s v_{k-n})^2\\
&\;\;\vdots\\
x_1^n+\cdots+x_n^n+(w_0+p_s z_1)^n+\cdots+(w_0+p_s z_{k-n})^n &= y_1^n+\cdots+y_n^n+(w_0+p_s v_1)^n+\cdots+(w_0+p_s v_{k-n})^n
\end{aligned}$$

ist mit

$$0\le z_j, v_j \le P\cdot p_s^{-1}\;,\; x_i \not\equiv x_j \bmod p_s\;,\; y_i\not\equiv y_j \bmod p_s\;,\; 1\le i,j\le n\,.$$

Wegen der Translationsinvarianz der Lösungsmenge (Lemma 3.2.4(a)) ist dies auch die Lösungsanzahl des Systems

$$\begin{array}{rcl} x_1+\cdots+x_n-y_1-\cdots-y_n &=& p_s(z_1+\cdots+z_{k-n}-v_1-\cdots-v_{k,n}) \\ x_1^2+\cdots+x_n^2-y_1^2-\cdots-y_n^2 &=& p_s^2(z_1^2+\cdots+z_{k-n}^2-v_1^2-\cdots-v_{k,n}^2) \\ \vdots && \vdots \\ x_1^n+\cdots+x_n^n-y_1^n-\cdots-y_n^n &=& p_s^n(z_1^n+\cdots+z_{k-n}^n-v_1^n-\cdots-v_{k,n}^n) \end{array} . \tag{11}$$

mit $1-w_0 \le x_j, y_j \le P-w_0$ und $x_i \not\equiv x_j \bmod p_s$ sowie $y_i \not\equiv y_j \bmod p_s$ für $1 \le i < j \le n$ und $0 \le z_j, v_j \le P\cdot p_s^{-1}$. Für $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sei $D(\Lambda)$ die Anzahl der Lösungen des Systems

$$\begin{cases} x_1^\nu+\cdots+x_n^\nu-y_1^\nu-\cdots-y_n^\nu \quad = \quad p^\nu\lambda_\nu \ , \ 1\le\nu\le n \\ \quad 1-w_0 \le x_j, y_j \le P-w_0 \\ x_i \not\equiv x_j \bmod p_s \ , \ y_i \not\equiv y_j \bmod p_s \quad \text{für} \quad 1\le i<j\le n \end{cases} .$$

Die Anzahl J' der Lösungen des Systems (11) ist dann

$$J' = \sum_\Lambda D(\Lambda) J(\lfloor Pp_s^{-s}\rfloor+1; n, k-n, \Lambda) \le J(\lfloor Pp_s^{-1}\rfloor+1; n, k-n) \sum_\Lambda D(\Lambda) \le J(\lfloor Pp_s^{-1}\rfloor+1, n, k-n) T, \tag{12}$$

wobei T die Anzahl der Lösungen des Kongruenzsystems (C_{p_s}) ist mit $1-w_0 \le x_j, y_j \le P-w_0$ und $x_i \not\equiv x_j \bmod p_s$ und $y_i \not\equiv y_j \bmod p_s$ für $i \ne j$. Nach Lemma 3.3.1 (Linnik) ist

$$T \le n! \cdot p_s^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot P^n . \tag{13}$$

Aus (5), (6), (7), (10), (11), (12) und (13) folgt dann

$$J_1 \le n! \cdot \binom{k}{n}^2 \cdot n^2 \cdot \rho^{2k-2n+\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot P^n \cdot J(P_1; n, k-n) , \tag{14}$$

wobei für ρ dasjenige p_s gewählt wird, für das die rechte Seite von (14) maximal ist. Wir kommen nun zur Abschätzung von J_2: Es sei $p_s \in \{p_1, \ldots, p_n\}$. Für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in B$ setzen wir

$$\vec{x}^{(s)} = (x_1^{(s)}, \ldots, x_k^{(s)}) \ , \ x_i \equiv x_i^{(s)} \bmod p_s \ , \ 0 \le x_i^{(s)} < p_s \ , \ 1 \le i \le k .$$

Es sei $B_s = \{\vec{x}^{(s)} \mid \vec{x} \in B\}$. Es ist

$$|B_s| \le \binom{p_s}{n-1} \cdot (n-1)^k , \tag{15}$$

da für $\vec{x} \in B$ nach Definition die x_i in höchstens $n-1$ verschiedenen Restklassen mod p_s liegen. Für eine feste Wahl des n-Tupels $(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)})$ mit $\vec{x}^{(s)} \in B_s$ betrachten wir die Menge

$$\left\{\vec{x} \in B \mid \vec{x} \equiv \vec{x}^{(s)} \bmod p_s \ , \ 1 \le s \le n\right\} .$$

Nach dem Chinesischen Restsatz kann das System $\vec{x} \equiv \vec{x}^{(s)} \bmod p_s$, $1 \le s \le n$, durch eine einzelne Kongruenz

$$\vec{x} \equiv \vec{M} \mod p_1 \cdots p_n \tag{16}$$

ersetzt werden mit

$$\vec{M} = (M_1, \ldots, M_k) \ , \ 0 \le M_i < p_1 \cdots p_n .$$

Wegen $x_i \le P$ und $p_1 \cdots p_n > P$ ist $\vec{x}$ durch $\vec{M}$ und somit durch das n-Tupel $(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)})$ mit $\vec{x}^{(s)} \in B_s$ eindeutig bestimmt. Daher

$$|B| \le |B_1| \cdots |B_n| \le \binom{p_1}{n-1}(n-1)^k \cdots \binom{p_n}{n-1} n-1^k . \tag{17}$$

für ein festes $\vec{x} \in B$ betrachten wir die Anzahl aller $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ mit $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}(P, \vec{0})$, d. h.

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_k = y_1+\cdots+y_k \\ x_1^2+\cdots+x_k^2 = y_1^2+\cdots+y_k^2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_1^n+\cdots+x_k^n = y_1^n+\cdots+y_k^n \\ 1 \le x_j, y_j \le P \end{cases} .$$

Nach Lemma 3.3.2 sind für festes $(y_1, \ldots, y_{k-n})$ die n Komponenten $(y_{k-n+1}, \ldots, y_n)$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Damit folgt mit (17) die Abschätzung

$$J_2 \;\le\; (n-1)^{kn} \binom{p_1}{n-1} \cdots \binom{p_n}{n-1} \cdot n! \cdot P^{k-n} \;\le\; n^{2kn} \cdot P^{k-1} \,. \tag{18}$$

Aus (4), (14) und (18) folgt

$$\begin{aligned} J \;&\le\; 2J_1 + 2J_2 \;\le\; 2n^2 \cdot \binom{k}{n}^2 \cdot n! \cdot \rho^{2k-2n+\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot P^n \cdot J(P_1; n, k-n) + (2n)^{2kn} \cdot P^{k-1} \\ &\le\; 4k^{2n} \cdot \rho^{2k-2n+\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot P^n \cdot J(P_1; n, k-n) + (2n)^{2kn} \cdot P^k \,. \end{aligned} \tag{19}$$

□

3.5 Der Mittelwertsatz

Die folgende Abschätzung für $J(P; n, k)$ kann auch als Abschätzung der Mittelwerte aus Definition 3.1.1 aufgefasst werden, und trägt daher den Namen Mittelwertsatz:

Satz 3.5.1 (Vinogradoff). *Es seien $k, n, \tau \in \mathbb{N}$. Für $k \ge n\tau$ und $P \ge 1$ gilt die Abschätzung*

$$J \;=\; J(P; n, k) \;\le\; n^{2Dn} \cdot 2^T \cdot (8k)^{2n\tau} \cdot P^{2k-D} \tag{MW}$$

mit den Werten

$$\begin{aligned} D \;&=\; D(\tau) \;=\; \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau} \,, \\ T \;&=\; T(\tau) \;=\; n^2\tau + \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n^2(n-1) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}\right) \;<\; \frac{3}{2}(n+1)^2 \cdot \tau \,. \end{aligned}$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach τ, dabei wird die Rekursion für J des vorigen Abschnitts sowie die Rekursionen

$$D(m+1) \;=\; D(m) + n + \frac{1}{2} - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{n}D(m)\right) \quad , \quad T(m+1) \;\le\; T(m) + D(m) + \frac{1}{2}n(n-1) \tag{1}$$

der eingeführten Funktionen D und T angewendet. Es genügt zunächst, die Schranke für den Fall $k = n\tau$ und $n \ge 2$ zu zeigen. Für $\tau = 1$ ist $k = n$, $D = n$ und $T = n^2 + n$, d. h. die Behauptung ist in diesem Fall

$$J \;\le\; n^{2n^2} \cdot 2^{n^2+n} \cdot (8n)^{2n} \cdot P^{2k-n} \,,$$

die wegen

$$J \;\le\; n! \cdot P^{2k-n}$$

trivialerweise erfüllt ist. Wir nehmen also an, dass die Behauptung für $\tau = m$ gilt und zeigen sie für $\tau = m+1$. Anwendung der Rekursion aus Lemma 3.4.2 auf $J(P; n, n(m+1))$ ergibt

$$J(P; n, n(m+1)) \;\le\; 4k^{2n} \cdot \rho^{2k-2n+\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot P^n \cdot J(P_1; n, k-n) + (2n)^{2kn} \cdot P^k \tag{2}$$

mit $k = n(m+1)$. Anwendung der Induktionsvoraussetzung $\tau = m$ ergibt

$$J(P_1; n, k-n) \;\le\; n^{2Dn} \cdot 2^T \cdot (8nm)^{2nm} \cdot P_1^{2k-D} \,.$$

mit

$$\begin{aligned} D \;&=\; D(\tau) \;=\; D(m) \;=\; \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m} \,, \\ T \;&=\; T(\tau) \;=\; T(m) \;=\; n^2\tau + \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n^2(n-1) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m}\right) \,. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung wird nun in (2) eingesetzt. Aus den Abschätzungen $D(\tau) \leq n\tau$ und $P \leq (4k)^2$ folgt $P^{2k} \leq (8k)^{2n\tau} \cdot P^{2k-D(\tau)}$, also übersteigt die Schranke (MW) die triviale Schranke P^{2k} für die Lösungsanzahl $J(P; n, k)$ sobald $P \leq (4k)^2$ ist, wir können daher im Folgenden $P > (4k)^2$ annehmen und erhalten

$$\frac{\rho}{P} \leq 2P^{-1+\frac{1}{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{P}} < \frac{1}{2k}$$

und damit

$$\begin{aligned} P_1^{2k-2n-D(m)} &= \left(\frac{P}{\rho}+1\right)^{2k-2n-D(m)} \leq P^{2k-2n-D(m)} \cdot \rho^{-2k+2n+D(m)} \cdot \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} \\ &\leq 3P^{2k-2n-D(m)} \cdot \rho^{-2k+2n+D(m)} . \end{aligned}$$

In der Abschätzung (2) gilt damit

$$\begin{aligned} J_1 &\leq 12k^{2n} \cdot n^{2D(m)n} \cdot 2^{T(m)} \cdot (8nm)^{2nm} \cdot \rho^{D(m)+\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot P^{2k-n-D(m)} \\ &\leq 12k^{2n} \cdot 2^{T(m)+D(m)+\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot n^{2D(m)n} \cdot (8nm)^{2nm} \cdot P^{2k-(D(m)+n+\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}n+\frac{1}{n}D(m)))} . \end{aligned}$$

Anwendung der Rekursionen (1) für D und T ergibt

$$J_1 \leq \frac{1}{2} n^{2D(m+1)n} \cdot 2^{T(m+1)} \cdot (8k)^{2n(m+1)} \cdot P^{2k-D(m+1)} . \tag{3}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der zweite Summand in (2) ebenfalls durch diese Schranke abgeschätzt wird. Da $D(m+1) \leq k$ ist, können wir $P > (2n)^{2n}$ annehmen, sonst ist die rechte Seite von (MW) größer als die triviale Abschätzung $J(P; n, k) \leq P^{2k}$. Daraus folgt

$$\left((2n)^{-2n} \cdot P\right)^{k-D(m+1)} \geq 1 \text{ bzw. } (2n)^{2kn} \cdot P^k \cdot \left((2n)^{-2n} \cdot P\right)^{k-D(m+1)} \geq (2n)^{2kn} \cdot P^k ,$$

und wir erhalten mit

$$(2n)^{2kn} \cdot P^k \leq n^{2D(m+1)n} \cdot P^{2k-D(m+1)}$$

die verbleibende Abschätzung

$$\frac{1}{2}(2n)^{2D(m+1)n} \cdot P^k \leq \frac{1}{2} n^{2D(m+1)n} \cdot 2^{T(m+1)} \cdot (8k)^{2n(m+1)} \cdot P^{2k-D(m+1)} . \tag{4}$$

Einsetzen von (3) und (4) in (2) ergibt die Schranke (MW) für $\tau = m+1$, und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$

3.6 Das schärfste Restglied im Primzahlsatz

Der Mittelwertsatz erlaubt eine bessere Abschätzung der Exponentialsumme

$$\sum_{a<n\leq b} n^{it} ,$$

die sich in eine verbesserte Abschätzung von $|\zeta(\sigma + it)|$ übersetzt, und über Satz 1.10.13 eine verbesserte nullstellenfreie Zone der Riemannschen Zeta-Funktion und ein besseres Restglied im Primzahlsatz ergibt. Wir benötigen dazu die folgende (rein technische) Abschätzung:

Lemma 3.6.1. *Ist $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$ mit $q \geq 1$ und $\mathrm{ggT}(a, q) = 1$ sowie $|\theta| \leq 1$, dann gilt für alle $\beta, U > 0$ und $P \geq 1$ die Abschätzung*

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(P, \|\alpha x + \beta\|^{-1}\right) \leq 6 \cdot \left(\frac{P}{q}+1\right) \cdot (U + q \cdot \log(q)) .$$

Beweis. Es bezeichne $\|\alpha\|$ den Abstand von $\alpha \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl und $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor\alpha\rfloor$ den gebrochenen Anteil. Wir teilen die (ggf. auf ein Vielfaches von q erweiterte) Summe in $\frac{P}{q} + 1$ Teilsummen der Länge q auf und zeigen

$$S \;=\; \sum_{x=1}^{q} \min\left(U, \|\alpha x + \beta_1\|\right) \;\leq\; 6(U + q \cdot \log(q))$$

für beliebige β_1. Es gilt zunächst

$$\alpha x + \beta_1 \;=\; \frac{ax + \lfloor q\beta_1 \rfloor}{q} + \frac{\theta_1(x)}{q^2}$$

mit $\theta_1(x) = \theta x + \{q\beta_1\}\, q$. Es ist $|\theta_1(x)| < 2q$ für $1 \leq x \leq q$, und da $\|x\|$ die Periode 1 besitzt ergibt die Substitution $y = ax + \lfloor q\beta_1 \rfloor$ die Abschätzung

$$S \;\leq\; \sum_{|y| \leq \frac{q}{2}} \min\left(U\,,\; \left\|\frac{y + \theta_2(y)}{q}\right\|^{-1}\right)$$

mit $|\theta_2(y)| < 2$. Wir können $q > 6$ annehmen, sonst ist die Behauptung schlechter als die triviale Abschätzung. Falls $2 < |y| \leq \frac{q}{2}$ ist, gilt

$$\left\|\frac{y + \theta_2(y)}{q}\right\| \;\geq\; \frac{|y| - 2}{q}\,,$$

und damit

$$S \;\leq\; 5U + \sum_{2 < |y| \leq \frac{q}{2}} \frac{q}{|y| - 2} < 6(U + q \cdot \log(q))\,.$$

□

Wir schätzen nun mit dem Mittelwertsatz die reine Zeta-Summe ab. Da wir für die spätere Verwendung der Abschätzung eine exakte Schranke benötigen, können wir die O-Notation nicht verwenden, wodurch die Rechnung sehr technisch wird:

Satz 3.6.2. *Es gibt absolute Konstanten $c, \gamma > 0$ so dass die Abschätzung*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} n^{it}\right| \;\leq\; c \cdot N \cdot \exp\left(-\gamma \cdot \frac{\log(N)^3}{\log(t)^2}\right)$$

für $2 \leq N \leq t$ gilt.

Beweis. Es sei $100 \leq M \leq N$, wir betrachten Teilsummen der Form

$$S \;=\; \sum_{n=M+1}^{2M} n^{it}\,.$$

Es sei $a = \lfloor M^{\frac{5}{11}} \rfloor$ und $1 \leq x, y \leq a$, dann gilt

$$S \;=\; \sum_{n=M+1}^{2M} \exp\left(it \cdot \log(n + xy)\right) + 2\theta a^2$$

mit $|\theta| \leq 1$, damit

$$|S| \;\leq\; \frac{1}{a^2} \sum_{n=M+1}^{2M} |W(n)| + 2a^2 \;\text{ mit }\; W(n) \;=\; \sum_{x=1}^{a} \sum_{y=1}^{a} \exp\left(it \cdot \log\left(1 + \frac{xy}{n}\right)\right)\,.$$

Wir führen also einen Weylschritt (in Analogie zum Beweis von Satz 2.8.2) aus, d. h. wir übertragen eine Schranke für $W(n)$ auf S. Aus der Abschätzung $|e^{i\varphi} - 1| = 2|\sin(\frac{1}{2}\varphi)| \leq |\varphi|$ folgt für $r \geq 1$ die Darstellung

$$\exp\left(it \cdot \log\left(1 + \frac{xy}{n}\right)\right) \;=\; \exp(it \cdot F_r(xy)) + t \cdot \theta_1 \cdot \left(\frac{a^2}{n}\right)^{r+1}$$

mit der Logarithmus-Reihe

$$F_r(xy) \;=\; \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n}\right)^m$$

und $|\theta_1| \le 1$. Es sei r festgelegt durch

$$r - 1 \;<\; \frac{11 \cdot \log(t)}{\log(M)} \;<\; r\,,$$

dann gilt $W(n) = W_1(n) + 4\theta_2 \cdot a^2 \cdot M^{-\frac{1}{13}}$ mit

$$W_1(n) \;=\; \sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a} e\left(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_r x^r y^r\right) \quad , \quad \alpha_m \;=\; \alpha_m^{(n)} \;=\; \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi m} \cdot \frac{t}{n^m}$$

für $m = 1, 2, \ldots, r$ und $|\theta_2| \le 1$. Aus der Hölderschen Ungleichung und Lemma 3.2.2(d) folgt für alle $k \ge 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|W_1|^{2k} \;&\le\; a^{2k-1} \sum_{x=1}^{a} \left| \sum_{y=1}^{a} e\left(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_r x^r y^r\right) \right|^{2k} \\
&\le\; a^{2k-1} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r} J(a;r,k,\Lambda) \cdot \left| \sum_{x=1}^{a} e\left(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r\right) \right| .
\end{aligned}$$

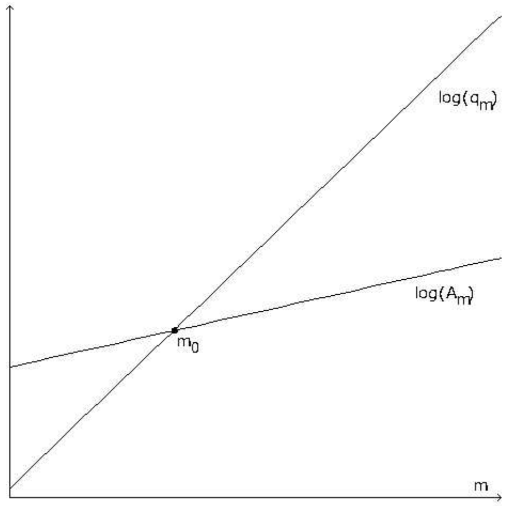
Durch mehrfache Anwendung dieser Abschätzung können wir eine geeignete Potenz von W_1 auf eine Summe aus linearen Exponentialsummen reduzieren, die nach Lemma 2.2.2 die Schranken

$$\left| \sum_{x=1}^{a} e(\lambda x) \right| \;\le\; \frac{1}{|\sin(\pi\lambda)|} \;\le\; \frac{1}{2\|\lambda\|}$$

für $0 < \lambda < 1$ besitzen. Zweifache Anwendung der Hölderschen Ungleichung und Lemma 3.2.2(d) ergibt

$$\begin{aligned}
|W_1|^{4k^2} \;&\le\; a^{4k^2-2k} \left(\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r} J(a;r,k,\Lambda) \right)^{2k-1} \cdot \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r} J(a;r,k,\Lambda) \cdot \left| \sum_{x=1}^{a} e\left(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r\right) \right|^{2k} \\
&\le\; a^{8k^2-4k} J(a;r,k) \cdot \left| \sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_r \\ \vartheta_1,\ldots,\vartheta_r}} J(a;r,k,\Theta) e\left(\alpha_1 \lambda_1 \vartheta_1 + \cdots + \alpha_r \lambda_r \vartheta_r\right) \right| \\
&\le\; a^{8k^2-4k} J(a;r,k) \cdot \sum_{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_r} J(a;r,k,\Theta) \cdot \min\left(2A_1, \|\alpha_1\vartheta_1\|^{-1}\right) \cdots \min\left(2A_r, \|\alpha_r\vartheta_r\|^{-1}\right) \\
&\le\; a^{8k^2-4k} J(a;r,k)^2 \prod_{m=1}^{r} \sum_{|\vartheta_m| < A_m} \min\left(2A_m, \|\alpha_m\vartheta_m\|^{-1}\right)
\end{aligned}$$

mit $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ bzw. $\Theta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r)$ und $A_m = 2ka^m$ für $m = 1, \ldots, r$.



Veranschaulichung von q_m und A_m, der Schnittpunkt liegt bei $m_0 \;=\; \frac{11}{6}\cdot\frac{\log(t)}{\log(M)}$.

Mit Lemma 3.6.1 können die Summen über die ϑ_m für m mit

$$m \;\le\; \frac{3}{2}\cdot\frac{\log(t)}{\log(M)} \tag{$*$}$$

abgeschätzt werden, für die anderen m schätzen wir die Summe über ϑ_m trivial durch $(2A_m)^2$ ab. Für Summen über die m mit $(*)$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma_m \;&=\; \sum_{|\vartheta_m|<A_m} \min\left(2A_m, \|\alpha_m\vartheta_m\|^{-1}\right)\\ &\le\; 6\cdot(2A_m q_m^{-1}+1)\cdot(2A_m+q_m\log(q_m)) \;\le\; 6\cdot(2A_m)^2\cdot(q_m^{-1}+A_m^{-1}+\tfrac{1}{4}q_m A_m^{-2})\cdot\log(q_m)\end{aligned}$$

nach Lemma 3.6.1 mit den q_m aus der Darstellung

$$\alpha_m \;=\; \frac{(-1)^{m-1}t}{2\pi m n^m} \;=\; \frac{a_m}{q_m}+\frac{\theta_m}{q_m^2} \;\;,\;\; a_m \;=\; (-1)^{m-1} \;\;,\;\; q_m = \lfloor 2\pi m n^m t^{-1}\rfloor \;\;,\;\; |\theta_m|\le 1\,.$$

Die Bedingung $(*)$ ergibt die Abschätzung

$$\sigma_m \;\le\; 400(32)^r\cdot(2A_m)^2\cdot t^{-\frac{2}{11}}$$

und damit

$$|W_1|^{4k^2} \;\le\; a^{8k^2-4k}\cdot J(a;r,k)^2\cdot(400)^r\cdot(32)^{r^2}\cdot a^{r^2+r}\cdot t^{-\frac{8}{11}\cdot\frac{\log(t)}{\log(M)}}\,.$$

Ist $\tau\in\mathbb{N}$ minimal, so dass $e^\tau \ge 380^r$ ist, so ergibt der Mittelwertsatz 3.5.1, angewendet auf $J(a;r,k)$ mit $k=r\tau$, zusammen mit $a\le M^{\frac{5}{11}}$ die Abschätzung

$$|W_1|^{4k^2} \;\le\; a^{8k^2}\cdot(400)^r\cdot(32)^{r^2}\cdot(4k)^{2r}\cdot(2r\tau)^{10r^2\tau}\cdot t^{-\frac{4}{11}\cdot\frac{\log(t)}{\log(M)}}\,.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$|W_1| \;\le\; c_1\cdot a^2\cdot\exp\left(-\gamma_1\cdot\frac{\log(M)^3}{\log(t)^2}\right)$$

mit absoluten Konstanten $c_1,\gamma_1>0$. Daraus folgt die entsprechende Abschätzung für die Teilsummen S und damit Behauptung des Satzes

$$\left|\sum_{n=1}^{N} n^{it}\right| \;\le\; c\cdot N\cdot\exp\left(-\gamma\cdot\frac{\log(N)^3}{\log(t)^2}\right)$$

für entsprechend gewählte Konstanten $c,\gamma>0$. □

Aus dieser Abschätzung reiner Exponentialsummen folgt

Satz 3.6.3. *Es gibt eine absolute Konstante $\gamma_1 > 0$, so dass für alle σ aus der Zone*

$$\sigma \;\geq\; 1 - \frac{\gamma_1}{\log(|t|)^{\frac{2}{3}}} \quad , \quad t \geq 2$$

die Abschätzung

$$\zeta(\sigma + it) \;=\; O(\log(|t|)^{\frac{2}{3}})$$

gilt.

Beweis. Wir können $t > 2$, und wegen Lemma 1.10.10 auch $\sigma \leq 2$ annehmen. Es sei $\gamma_1 = \frac{1}{2}\gamma$ für die Konstante γ aus Satz 3.6.2. Wir setzen $N = \exp(\log(t)^{\frac{2}{3}})$ sowie $x = t$, dann erhalten wir mit der Hardy-Littlewood-Approximation (Satz 2.7.4) die Abschätzung

$$|\zeta(s)| \;\leq\; \left|\sum_{n\leq N} n^{-s}\right| + \left|\sum_{N<n\leq x} n^{-s}\right| + \underbrace{\frac{t^{1-\sigma}}{|1-\sigma-it|} + O(t^{-\sigma})}_{=O(1)} .$$

Die erste Summe wird abgeschätzt zu

$$\left|\sum_{n\leq N} n^{-\sigma-it}\right| \;\leq\; \sum_{n\leq N} n^{-\sigma} \;\leq\; 1 + \int_1^N u^{-\sigma} du \;=\; 1 + \int_1^N \frac{u^{1-\sigma}}{u} du \;\leq\; 1 + \int_1^N \frac{c}{u} du \;=\; O(\log(N)) \;=\; O(\log(t)^{\frac{2}{3}}) .$$

Die zweite Summe schätzen wir durch partielle Summation ab mit $c_n = n^{-it}$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{N<n\leq x} n^{-\sigma-it}\right| \;&\leq\; \sigma \cdot \int_N^x \left|\sum_{N<n\leq u} n^{-it}\right| u^{-1-\sigma} du + \left|\sum_{N<n\leq x} n^{-it}\right| \cdot x^{-\sigma} \\
&=\; O\left(\int_N^x u^{-\sigma} \exp\left(-\gamma \frac{\log(u)^3}{\log(t)^2}\right) du\right) + O\left(t^{-1-\sigma-\gamma}\right) \\
&=\; O\left(\int_{\log(N)}^{\log(x)} \exp\left(v(1-\sigma) - \frac{\gamma v^3}{\log(t)^2}\right) dv\right) + O(1) \\
&=\; O\left(\int_{\log(N)}^{\log(x)} \exp\left(-\gamma \frac{v^3}{\log(t)^2}\right) dv\right) + O(1) \;=\; O(\log(t)^{\frac{2}{3}})
\end{aligned}$$

für σ aus der Zone. □

Auf der Halbebene $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ erhält man dagegen

Satz 3.6.4. *Für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ und $|t| \geq 2$ gilt die Abschätzung*

$$\zeta(s) \;=\; O\left(|t|^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \cdot \log|t|\right)$$

mit einer absoluten Konstante $a > 0$.

Beweis. Die Hardy-Littlewood-Approximation 2.7.4 ist für $x = t$ und $s = \sigma + it$

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n\leq t} n^{-s} + O(1) .$$

Partielle Summation wie im Beweis von Satz 3.6.3 ergibt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\le t} n^{-\sigma} n^{-it}\right| &\le \sigma \cdot \int_1^t \left|\sum_{n\le u} n^{-it}\right| u^{-1-\sigma} du + \left|\sum_{n\le t} n^{-ut}\right| \cdot t^{-\sigma} \\ &= O\left(\int_1^t u^{-\sigma} \exp\left(-\gamma \frac{\log(u)^3}{\log(t)^2}\right) du\right) + O(1) \\ &= O\left(\int_0^{\log(t)} \exp\left(v(1-\sigma) - \gamma \frac{v^3}{\log(t)^2}\right) dv\right) + O(1)\end{aligned}$$

mit der Konstanten $\gamma > 0$ aus Satz 3.6.2. Der Integrand ist maximal für

$$v = v_0 = \log(t) \cdot \sqrt{\frac{1-\sigma}{3\gamma}}$$

und nimmt in v_0 den Wert

$$\exp\left(\frac{2}{3\sqrt{3\gamma}}(1-\sigma)^{\frac{3}{2}} \cdot \log(t)\right) = t^{\frac{2(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\gamma}}}$$

an. Daraus folgt die Behauptung mit $a = \frac{2}{3\sqrt{3\gamma}}$. ☐

Korollar 3.6.5. *Für jedes $c > 0$ existiert ein $c_1 > 0$, so dass für alle s aus der Zone*

$$\sigma \ge 1 - c\frac{\log(\log(t))^{\frac{2}{3}}}{\log(t)^{\frac{2}{3}}} \quad , \quad t \ge 10$$

die Abschätzung

$$\zeta(s) = O\left(\log(t)^{c_1}\right)$$

gilt. Durch Wahl eines genügend kleinen $c > 0$ kann $c_1 < 1 + \varepsilon$ erreicht werden für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Für $\sigma \le 1$ folgt die Abschätzung aus Satz 3.6.4 wegen $t^{(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \le \log(t)^{c^{\frac{3}{2}}}$, für $\sigma > 1$ folgt die Behauptung dagegen aus Satz 3.6.3. ☐

Mit Hilfe des allgemeinen Satzes 1.10.13 aus Kapitel 1 kann daraus eine verbesserte nullstellenfreie Zone und eine Abschätzung für die logarithmische Ableitung gewonnen werden:

Satz 3.6.6. *Es gibt eine absolute Konstante $\gamma_2 > 0$, so dass die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ keine Nullstellen in der Zone*

$$\sigma \ge 1 - \gamma_2 \cdot \log(\log(t))^{-\frac{1}{3}} \cdot \log(t)^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad t \ge 10$$

besitzt. Zudem gilt die Abschätzung

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \log(\log(t))^{\frac{1}{3}} \cdot \log(t)^{\frac{5}{3}}$$

in der Zone

$$\sigma \ge 1 - c_2 \cdot \log(\log(2t))^{\frac{1}{3}} \cdot \log(2t)^{\frac{2}{3}}$$

für eine absolute Konstante $c_2 > 0$.

Beweis. Es seien $c > 0$ und $c_1 > 1$ so gewählt, dass für beide Konstanten Korollar 3.6.5 gilt, dann wählen wir

$$\Phi(t) = \log(\log(t)^{c_1}) \quad , \quad \theta(t) = c \cdot \frac{\log(\log(t))^{\frac{2}{3}}}{\log(t)^{\frac{2}{3}}} \ .$$

Es gilt

$$e^{\Phi(t)} = e^{\log(\log(t)^{c_1})} = \log(t)^{c_1} \gg \zeta(s)$$

für $1-\sigma \leq \theta(t)$ nach Korollar 3.6.5, und völlig analog

$$\frac{\Phi(t)}{\theta(t)} e^{-\Phi(t)} \ll \log(\log(t)^{c_1}) \cdot \frac{\log(t)^{\frac{2}{3}}}{\log(\log(t))^{\frac{2}{3}}} \cdot \log(t)^{-c_1} \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

da $c_1 > 1$ ist. Zudem ist $\theta(t)^{-1}$ monoton wachsend und alle Funktionen sind positiv. Die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t+1)}{\Phi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t+1)}{\theta(t)} = 1$$

rechnet man leicht mit dem Satz von de l'Hôpital nach. Aus Satz 1.10.13 folgt somit, dass es eine Konstante γ_1 gibt, so dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen in der Zone

$$\sigma \geq 1 - \gamma_1 \cdot \frac{\theta(2t+1)}{\Phi(2t+1)} \ , \ t \geq 10$$

besitzt, mit

$$\gamma_1 \frac{\theta(2t+1)}{\Phi(2t+1)} = c\gamma_1 \cdot \log(\log(2t+1)^{c_1})^{-1} \cdot \log(\log(2t+1))^{\frac{2}{3}} \cdot \log(2t+1)^{-\frac{2}{3}} \leq \gamma_2 \cdot \log(\log(t))^{-\frac{1}{3}} \cdot \log(t)^{-\frac{2}{3}}$$

für ein genügend großes $\gamma_2 > 0$. Zusätzlich ist nach Satz 1.10.13

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \log(t) \cdot \frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)} = \log(t) \cdot \frac{1}{c} \log(\log(2t)^{c_1}) \cdot \log(\log(2t))^{-\frac{2}{3}} \cdot \log(2t)^{\frac{2}{3}} \ll \log(\log(t))^{\frac{1}{3}} \cdot \log(t)^{\frac{5}{3}}$$

in der Zone

$$\sigma \geq 1 - \gamma_1 \cdot \frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)} = 1 - \frac{\gamma_1}{c} \log(\log(2t)^{c_1}) \cdot \log(\log(2t))^{-\frac{2}{3}} \cdot \log(2t)^{\frac{2}{3}}$$

mit

$$\frac{\gamma_1}{c} \log(\log(2t)^{c_1}) \cdot \log(\log(2t))^{-\frac{2}{3}} \cdot \log(2t)^{\frac{2}{3}} \geq c_2 \cdot \log(\log(t))^{\frac{1}{3}} \cdot \log(t)^{\frac{2}{3}}$$

für genügend kleines $c_2 > 0$. □

Diese Abschätzungen ergeben, eingesetzt in den Beweisgang der Sätze 1.10.16 und 2.8.7, das schärfste bekannte Restglied für den Primzahlsatz:

Satz 3.6.7 (Primzahlsatz mit Restglied, 3. Version). *Es gibt eine Konstante $c_0 > 0$ mit*

$$\psi(x) = x + O\left(x \cdot \exp\left(-c_0 \cdot \frac{\log(x)^{\frac{3}{5}}}{\log(\log(x))^{\frac{1}{5}}}\right)\right), \tag{PZ3a}$$

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x \cdot \exp\left(-c_1 \cdot \frac{\log(x)^{\frac{3}{5}}}{\log(\log(x))^{\frac{1}{5}}}\right)\right). \tag{PZ3b}$$

Index