

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 29. April 2013, vor den Übungen

1. Es sei $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ mit $q \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei $g_n = n \cdot l \bmod q$.

(a) Zeige, dass es eine Untergruppe U von G gibt, so dass $(g_n)_{n=0}^\infty$ auf U gleichverteilt ist. Beschreibe U mittels $ggT(l, q)$.

(b) Für jedes $\chi \in \hat{G} = \left\{ \chi_l: G \rightarrow \mathbb{C}^*, m \bmod q \rightarrow \chi_l(m \bmod q) = e\left(\frac{lm}{q}\right) \right\}$ ist eine Abschätzung der Summe

$$\sum_{n \leq x} \chi(g_n) = c(\chi)x + O_q(1)$$

für $x \rightarrow \infty$ mit einer passenden Konstanten $c(\chi)$ zu beweisen. (8 Punkte)

2. Es sei $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n \in \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen. Es sei $x \geq 1$ und $N = \sum_{n \leq x} a_n$. Für $0 \leq r \leq q-1$ sei

$$N(q, r) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv r \bmod q}} a_n \quad \text{und} \quad S(\alpha) = \sum_{n \leq x} a_n e(n\alpha).$$

Dann gilt

$$\sum_{r \bmod q} \left| N(q, r) - \frac{N}{q} \right|^2 = \frac{1}{q} \sum_{m=1}^{q-1} \left| S\left(\frac{m}{q}\right) \right|^2.$$

(6 Punkte)

3. Es sei $(y_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge mit $y_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ und $x > 0$ sei

$$N(x, \alpha, \beta) = |\{n \leq x: y_n \in [\alpha, \beta]\}|.$$

Die Folge (y_n) heißt gleichverteilt im Intervall $[0, 1]$, falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \cdot N(x, \alpha, \beta) = \beta - \alpha$$

für alle $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ gilt.

(a) Zeige, dass die Folge (y_n) genau dann in $[0, 1]$ gleichverteilt ist, wenn für alle über $[0, 1]$ Riemann- integrierbaren Funktionen f

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \cdot \sum_{n \leq x} f(y_n) = \int_0^1 f(u) du$$

gilt.

(b) Ist (y_n) in $[0, 1]$ gleichverteilt, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \cdot \sum_{n \leq x} e(my_n) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(10 Punkte)