

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 27. Mai 2013, vor den Übungen

1. Das Kriterium zur Gleichverteilung einer Folge in $[0, 1)$ wurde in Aufgabe 1 auf Übungsblatt 3 unter der Bedingung bewiesen, dass der Vektorraum

$$F = \left\{ f(\theta) = \sum_{n=-N}^N a_n e(n\theta), \quad N \in \mathbb{N}_0, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

der Fourierpolynome im Vektorraum C der auf $[0, 1)$ stetigen Funktionen dicht ist (im quadratischen Mittel). Der Beweis dieser Tatsache soll nun nachgeliefert werden.

Es sei $q \in \mathbb{N}$ ungerade, $m, l \in \mathbb{Z}$, $0 < \Delta < 1$ und $0 \leq l - \Delta q \leq l < m \leq m + \Delta q \leq q$.

Die Funktion $\text{Ch}_0 = \text{Ch}_0(\cdot; l, m, q): G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +) \rightarrow \mathbb{C}$ sei durch

$$\text{Ch}_0(r \bmod q) = \begin{cases} 1, & \text{falls } l \leq r \leq m, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Funktion $\text{Ch}_1 = \text{Ch}_1(\cdot; l, m, q, \Delta): G \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\text{Ch}_1(r \bmod q) = (\Delta q)^{-1} \sum_{1 \leq u \leq \Delta q} \text{Ch}_0(r \bmod q; l - u, m + u, q)$$

definiert.

- (a) Berechne die Fourierreihenentwicklung

$$\text{Ch}_1(r \bmod q) = \sum_{-\frac{q}{2} < n < \frac{q}{2}} c(n) e\left(n \cdot \frac{r}{q}\right)$$

von Ch_1 und zeige, dass eine positive von Δ , l , m und q unabhängige Konstante $C_1 > 0$ existiert, so dass $|c(n)| \leq C_1 \Delta^{-1} n^{-2}$ gilt.

- (b) Für $A > 1$ sei

$$\text{Ch}_2(r \bmod q; A) = \sum_{|n| \leq A} c(n) e\left(n \cdot \frac{r}{q}\right).$$

Zeige, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein von q unabhängiges $A = A(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $r \bmod q \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dann $|\text{Ch}_1(r \bmod q) - \text{Ch}_2(r \bmod q; A)| < \epsilon$ gilt.

- (c) Für $\alpha \in [0, 1)$ setzen wir

$$\text{Ch}(\alpha; A) = \sum_{|n| \leq A} c(n) e(n\alpha).$$

Es sei $\frac{r}{q} \leq \alpha < \frac{r+1}{q}$. Zeige, dass es eine von q , r , l , m , Δ und A unabhängige Konstante $C_2 > 0$ gibt, so dass $|\text{Ch}(\alpha; A) - \text{Ch}_2(r \bmod q; A)| < C_2 A^2 q^{-1}$ gilt.

Hinweis:

Benutze den Mittelwertsatz der Differentialrechnung getrennt für Real- und Imaginärteil der Differenz.

- (d) Zeige, dass F dicht in C liegt.

(12 Punkte)

2. Beweise die Eulersche Summenformel.

(5 Punkte)

3. Es sei χ ein Dirichletcharakter modulo 8.

(a) Zeige mittels des Satzes von Taylor, dass für $p \geq 2$ und $\Re(s) > 1$

$$\log(1 - \chi(p)p^{-s}) = -\chi(p)p^{-s} + c(p)p^{-2s}$$

mit $|c(p)| \leq 2$ gilt.

(b) Bestimme eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\left| \log L(s, \chi) - \sum_p \chi(p)p^{-s} \right| \leq C$$

gilt.

(c) Zeige:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} L(s, \chi) \neq 0.$$

(d) Bestimme für $k \in \{1, 3, 5, 7\}$ Konstanten C_k , so dass

$$\left| \sum_{p \equiv k \pmod{8}} p^{-s} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{s-1} \right| \leq C_k$$

gilt.

(7 Punkte)